UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
ES, Q, KandFy, X
Linjär algebra II
2010–01–12

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med utförliga motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i A:s radrum, kolonnrum och nollrum. Utvidga basen i nollrummet till en bas i $\mathbb{R}^4$.

2. Bestäm en ON-bas i delrummet $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ till $\mathbb{E}^4$. Skriv vektorn $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0)$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in M$ och $\mathbf{u}_2 \in M^{\perp}$. Beräkna även avståndet från $\mathbf{u}$ till $M^{\perp}$.

3. Låt $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - y - z = 0 = x + y + 2z\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala projektionen på $M^{\perp}$. Bestäm standardmatrisen för F.

4. Lös systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = 16y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) = 45y_1(t) - 17y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$.

5. Visa att ekvationen $x^2 + 2y^2 + 4yz + 5z^2 = 1$ beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxeln och minsta avståndet från ytan till origo.

Var god vänd!

6. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -a & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F?

(ii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F.

7. Låt $\mathcal{P}_3$ vara rummet av alla polynom av grad högst tre och låt $\mathcal{S}_3$ beteckna rummet av alla symmetriska 3×3-matriser. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{S}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ definieras genom

$$F(x) = (x_1 + x_4 + x_6) + (x_2 + x_3 + x_5)t + (x_2 + x_4 + x_5)t^2 + (x_3 + x_5 + x_6)t^3,$$

för

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3.$$

Bestäm baser $\underline{b} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6)$ i $\mathcal{S}_3$ och $\underline{c} = (c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$ i $\mathcal{P}_3$ sådana att

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Vektorrummet V är försett med skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Låt e vara en enhetsvektor med avseende på denna skalärprodukt och definiera $F : V \to V$ genom $F(v) = v - 2\langle v, e \rangle e$. Visa att

(a) F är en linjär, isometrisk operator på V,

(b) $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$ för alla $u, v \in V$,

(c) $F \circ F = I$, där I är identitetsoperatorn på V.