UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Styf

LINJÄR ALGEBRA II

Lösta problem

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (2,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (3,1,2,2)$, $u_4 = (1,1,1,0)$, $u_5 = (1,0,-2,1)$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.*

(ii) För vilka värden på den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ delrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn v i den bas som du valde i del (i) av uppgiften.

Lösning. Vi löser båda delarna av uppgiften samtidigt. En vektor v ur $\mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5 = v$$

Detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 3 \\ 3+a \\ 2+2a \end{pmatrix} \tag{1}$$

har någon lösning.
Vi löser ekvationssytemet med hjälp av Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3+a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3+a \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2+2a \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1} - \boxed{2} \\ (\boxed{2} \leftrightarrow \boxed{1}) \\ (\boxed{3} - \boxed{2}) \\ \boxed{4} - \boxed{3} \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longmapsto \\ \boxed{3} - \boxed{2} \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longmapsto \\ \\ \boxed{4} + \boxed{3} \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Detta system är lösbart omm $a + 2 = 0$ dvs. om och endast om $a = -2$. Det följer att

$$v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a) \in M \quad \Leftrightarrow \quad a = -2 \qquad .$$

Dessutom är $\dim M = \text{rang}$ (koeff.matrisen) $= 3$.
I den sista matrisen har vi pivotelement i kolonn 1, 2 och 4 vilket medför att $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_4)$ utgör en bas i M.

Antag nu att $a = -2$.

Den sista matrisen är då

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \boxed{1} + \boxed{2} \\ -(\boxed{2} + \boxed{3}) \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

För att lösa detta ekvationssystem: välj t.ex. $\lambda_5 = t$, $\lambda_3 = s$ som parametrar. Det följer att $\lambda_4 = 3 + 3t$, $\lambda_2 = 2 + s - 2t$ och $\lambda_1 = -2 - 2s - t$. Detta ger alla möjliga lösningar till ekvationssystemet (1) i fallet då $a = -2$. Speciellt, om vi väljer $t = 0$, $s = 0$ får vi lösningen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 0$. Insatt i ekvationen (1) ger detta

$$(-2)\, u_1 + 2\, u_2 + 3\, u_4 = v$$

om $a = -2$. (Hur syns detta direkt i den sista matrisen?)

Svar: (i) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_4)$ utgör en bas i M (t.ex.). (ii) $v \in M \Leftrightarrow a = -2$. Om $a = -2$: $v = (-2)u_1 + 2u_2 + 3u_4 = (-2, 2, 3)_{\mathbf{u}}$.

□

2. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 1, -1)$, $u_3 = (0, 3, 1, -3)$, $u_4 = (1, 2, 3, 1)$, $u_5 = (1, -1, 2, 4)$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.*

(ii) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (4, a + 3, 5, a - 4)$ delrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn v i den bas som du valde i del (i) av uppgiften.

Lösning. Vi löser båda delarna av uppgiften samtidigt. En vektor v ur $\mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5 = v \quad .$$

Detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ a+3 \\ 5 \\ a-4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

har någon lösning.
Vi löser ekvationssytemet med hjälp av Gausselimination

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & -1 & a+3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 4 & a-4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2} + \boxed{1} \\ \boxed{4} - \boxed{1} \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & a+7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & a-8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2} - 3\boxed{3} \\ \boxed{4} + 3\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & a+7 \end{array}\right) \overset{2\boxed{4}}{\underset{\boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3}}{\longmapsto}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 2a+14 \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\boxed{4}+3\boxed{3}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-10 \end{array}\right) \quad .$$

Detta system har någon lösning omm $5a-10=0$ dvs. om och endast om $a=2$. Det följer att

$$v=(4,a+3,5,a-4)\in M \quad \Leftrightarrow \quad a=2 \quad .$$

Dessutom är $\dim M = \text{rang}$ (koeff.matrisen) $=3$.
I den sista matrisen har vi pivotelement i kolonn 1, 2 och 4 vilket medför att $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_4)$ utgör en bas i M.

Antag nu att $a=2$.

Den sista matrisen är då

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad .$$

För att lösa detta ekvationssystem: välj t.ex. $\lambda_5=t$, $\lambda_3=s$ som parametrar. Det följer att $\lambda_4=1-t$, $\lambda_2=2-s+t$ och $\lambda_1=-1+2s-2t$. Detta ger alla möjliga lösningar till ekvationssystemet (1) i fall då $a=2$. Speciellt, om vi väljer $t=0$, $s=0$ får vi lösningen $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=1$, $\lambda_5=0$. Insatt i ekvationen (2) ger detta

$$(-1)\,u_1+2\,u_2+u_4=v$$

om $a=2$. (Kontrollera det sista resultatet!)

Svar: (i) $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_4)$ utgör en bas i M (t.ex.). (ii) $v\in M \Leftrightarrow a=2$. Om $a=2$: $v=-u_1+2u_2+u_4=(-1,2,1)_{\mathbf{u}}$.

□

3. Vektorerna $u_1=(1,2,1,-2)$, $u_2=(-2,-1,3,1)$, $u_3=(-1,1,4,-1)$, $u_4=(3,3,-2,-3)$, $u_5=(1,0,-1,0)$ spänner upp ett är delrum M till $\mathbb{R}^4$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.* Ange koordinaterna av de givna vektorerna i denna bas.

(ii) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v=(a,-1,5-a,1)$ delrummet M?

Lösning. Vi bildar följande matrisen och använder elementära radoperationer för att reducera den till trappstegsformen.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & -1 & 5-a \\ -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\begin{array}{l} \boxed{2} - 2\boxed{1} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \\ \boxed{4} + 2\boxed{1} \end{array}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -2 & -1-2a \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -2 & 5-2a \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 2 & 1+2a \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\begin{array}{l} \boxed{4} + \boxed{2} \\ \boxed{3} - 2\boxed{2} \end{array}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -2 & -1-2a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 7+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\begin{array}{l} (-1)\boxed{3} \\ \boxed{3} \leftrightarrow \boxed{2} \end{array}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -7-2a \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -2 & -1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\begin{array}{l} \boxed{1} + 2\boxed{2} \\ \boxed{3} - 3\boxed{2} \end{array}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & -14-3a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -7-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 20+4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det innebär att u_1, u_2 och u_5 är en bas i M och att v tillhör M för alla reella a. För att bestämma koordinaterna av de givna vektorerna i vår bas, reducerar vi matrisen ytterligare:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & -14-3a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -7-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 20+4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\longmapsto}{\begin{array}{l} (\frac{1}{4}\boxed{3}) \\ \boxed{2} + 2\boxed{3} \\ \boxed{1} + 3\boxed{3} \end{array}} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och får att koordinaterna av u_3 är $(1,1,0)$ och av u_4 är $(1,-1,0)$. $\square$

4. A och B är två delrum till $\mathbb{R}^4$. A spänns upp av vektorerna $(1,2,0,1)$ och $(2,3,1,1)$, medan B spänns upp av vektorerna $(1,1,-1,0)$ och $(2,1,-1,-1)$. Bestäm en bas i skärningsrummet $A \cap B$.

Lösning. En vektor v ur $\mathbb{R}^4$ tillhör A om den kan skrivas som $v = \lambda_1(1,2,0,1)+\lambda_2(2,3,1,1)$ för några $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Den tillhör B om den kan skrivas $v = \mu_1(1,1,-1,0)+\mu_2(2,1,-1,-1)$

för några $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Därmed tillhör v skärningsrummet $A \cap B$ omm

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Genom att flytta högra ledet till vänstra sidan ser vi att detta innebär att $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ är lösningar till det homogena linjära ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Genom Gausselimination reduceras denna matris till en radekvivalent trappstegsmatris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

vilken har lösningar $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (-2t, t, -2t, t) = t(-2, 1, -2, 1), \ t \in \mathbb{R}$.
Detta ger oss att vektorn v tillhör $A \cap B$ om och endast om $v = \lambda_1(1, 2, 0, 1) + \lambda_2(2, 3, 1, 1) = -2t(1, 2, 0, 1) + t(2, 3, 1, 1) = -t(0, 1, -1, 1), \ t \in \mathbb{R}$. Det innebär att

$$A \cap B = [(0, 1, -1, 1)]$$

och att, till exempel, vektorn $u = (0, 1, -1, 1)$ utgör en bas i skärningsrummet $A \cap B$.

□

5. Givna är två baser i $\mathbb{R}^2$. Basen $\mathbf{u}$ består av vektorerna $u_1 = (-1, -1)$, $u_2 = (1, 2)$, medan basen $\mathbf{v}$ består av vektorerna $v_1 = (1, 2)$ och $v_2 = (3, 5)$. Finn transformationsmatrisen T från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$. Bestäm koordinaterna i basen $\mathbf{v}$ för den vektor w som i basen $\mathbf{u}$ ges av $w = -2u_1 + 3u_2$.

Lösning. Om e_1, e_2 är standardbasen i $\mathbb{R}^2$ gäller alltså att $u_1 = -e_1 - e_2$, $u_2 = e_1 + 2e_2$ och $v_1 = e_1 + 2e_2$, $v_2 = 3e_1 + 5e_2$. Av detta följer att $u_1 + u_2 = (-e_1 - e_2) + (e_1 + 2e_2) = e_2$, vilket sedan ger $e_1 = -u_1 - e_2 = -u_1 - u_1 - u_2 = -2u_1 - u_2$. Sambanden mellan $\mathbf{u}$- och $\mathbf{v}$-vektorerna är därför

$$v_1 = e_1 + 2e_2 = (-2u_1 - u_2) + 2(u_1 + u_2) = u_2$$

samt

$$v_2 = 3e_1 + 5e_2 = 3(-2u_1 - u_2) + 5(u_1 + u_2) = -u_1 + 2u_2$$

Transformationsmatrisen T från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$ är därför

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrisen från basen $\mathbf{v}$ till basen $\mathbf{u}$ är

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$w = -2u_1 + 3u_2 = -2(2v_1 - v_2) + 3(v_1) = -v_1 + 2v_2$$

vilket betyder att koordinaterna för w i basen $\mathbf{v}$ är $(-1,\ 2)$.
Alternativ lösning: Om $\mathbf{e} = (e_1\ e_2)$ gäller att $\mathbf{u} = \mathbf{e}R$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}S$ där

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Det följer att $\mathbf{e} = \mathbf{u}\,R^{-1}$ och

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}S = \mathbf{u}\,R^{-1}S = \mathbf{u}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{u}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resten av lösningen är som förut. □

6. Givna är två baser i $\mathbb{R}^3$: basen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ med $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (2, 1, -3)$, och basen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ med $v_1 = (1, 3, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$. Bestäm transformationsmatrisen T från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$. Finn även koordinater i basen $\mathbf{u}$ för den vektor w som i basen $\mathbf{v}$ har koordinater $(2, 1, 1)$.

Lösning. Enligt definitionen är T den enda matris som uppfyller

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}T. \tag{1}$$

Låt $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och T_1 resp. T_2 vara transformationsmatriser från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$, dvs $\mathbf{u} = \mathbf{e}T_1$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}T_2$. Genom insättning i (1) får vi $\mathbf{e}T_2 = \mathbf{e}T_1T$, vilket medför $T_2 = T_1T$ och slutligen får vi $T = T_1^{-1}T_2$.
Enligt definitionen har vi:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi använder standardmetoden för att bestämma T_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[]{\substack{\boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}+\boxed{1}}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[]{\substack{\boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{3}-2\boxed{2}}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[]{\substack{\boxed{1}-3\boxed{3} \\ \boxed{2}+\boxed{3}}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Vi får

$$T = T_1^{-1}T_2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -22 & 15 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Om $w = (2,1,1)_{\mathbf{v}}$ och $w = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathbf{u}}$, så är enligt en av våra satser

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Därför är de sökta koordinaterna för vektorn w i basen $\mathbf{u}$ lika med

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -22 & 15 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

7. Låt N vara det delrum i $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1,-1,-1,1)$ och $u_2 = (1,-1,1,-1)$. Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet till N.

Lösning. Vektorn (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör ortogonala komplementet till N precis då den är ortogonal mot både u_1 och u_2, dvs

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $x_1 = x_2 = s$, $x_3 = x_4 = t$, där $s,\ t$ är godtyckliga. Alltså

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, s, t, t) = s(1,1,0,0) + t(0,0,1,1) = s\,u_3 + t\,u_4$$

Det följer att $u_3 = (1,1,0,0)$, $u_4 = (0,0,1,1)$ är en bas i $N^\perp$. Av en slump råkar dessa vektorer vara ortogonala med längden $\sqrt{2}$. En ON-bas i $N^\perp$ är därför $\frac{1}{\sqrt{2}}\,u_3$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,u_4$. □

8. Bestäm projektionen p av vektorn $w = (1, 2, 3, 4)$ på delrummet N i uppgift 7.

Lösning. Eftersom $u_1 = (1, -1, -1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ är ortogonala (och därmed en ortogonalbas i N) får vi med projektionsformeln genast

$$p = \frac{w \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\, u_1 + \frac{w \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\, u_2 = -\frac{2}{4}\, u_2 = \frac{1}{2}\,(-1, 1, -1, 1).$$

Om vi räknat rätt skall vektorn $q = w - p = \frac{1}{2}\,(3, 3, 7, 7)$ vara ortogonala projektionen av w på $N^\perp$ och följaktligen ortogonal mot både u_1 och u_2. Detta är helt klart fallet ty $q = \frac{3}{2}\, u_3 + \frac{7}{2}\, u_4 \in N^\perp$. $\square$

9. Delrummet N till $\mathbb{E}^4$ spänns upp av de fyra vektorerna $u_1 = (1, -1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, -4, 1)$, $u_3 = (1, 1, -3, 1)$ och $u_4 = (3, 1, -5, 1)$. Bestäm en ON-bas i rummet N och en ON-bas i det ortogonala komplementet $N^\perp$.

Lösning. (a) Vi börjar med att finna någon bas i N. Vi ställer vektorerna u_1, u_2, u_3, u_4 som **rader** i en matris och utför **radoperationer** tills vi får en radtrappstegsmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\substack{\boxed{2} - 2\boxed{1} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \\ \boxed{4} - 3\boxed{1}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{\substack{\frac{1}{3}\boxed{2} \\ \frac{1}{2}\boxed{3} \\ \frac{1}{4}\boxed{4}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\substack{\boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{3} - \boxed{2} \\ \boxed{4} - \boxed{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Det följer att vektorerna $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ och $v_2 = (0, 1, -2, 1)$ utgör en bas i delrummet N. Denna bas är inte ortonormerad. Vi utför Gram-Schmidt's procedur på dessa vektorer och får först vektorn $e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$. Sedan får vi vektorn $f_2 = v_2 - (v_2|e_1)e_1 = (0, 1, -2, 1) - ((0, 1, -2, 1)|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0))\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) = (0, 1, -2, 1) - \frac{1}{2} \cdot 2(1, 0, -1, 0) = (-1, 1, -1, 1)$ och, slutligen, vektorn $e_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$. Vektorerna $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ och $e_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$ utgör en ON-bas i delrummet N.

(b) En vektor $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tillhör det ortogonala komplementet $N^\perp$ omm w är vinkelrät mot vektorerna v_1 och v_2 vilka utgör en bas i N. Vektorn w är vinkelrät mot v_1 omm $(w \,|\, v_1) = x_1 - x_3 = 0$ och vinkelrät mot v_2 omm $(w \,|\, v_2) = x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Detta ger oss ett ekvationssystem med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

För att lösa systemet väljer vi t.ex. $x_4 = t$ och $x_3 = s$ som parametrar och får lösningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, 2s - t, s, t) = s(1, 2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Det följer att vektorerna

$w_1 = (0,-1,0,1)$ och $w_2 = (1,2,1,0)$ utgör en bas i $N^\perp$. Eftersom denna bas inte är ortonormerad söker vi en vektor $w_3 = (s, 2s-t, s, t) \in N^\perp$ som är vinkelrät mot $w_1 = (0,-1,0,1)$. Detta är ekvivalent med att $(w_3 \,|\, w_1) = -2s+t+t = 2t-2s = 0$. Vi väljer t.ex. $s = t = 1$ och får vektorn $w_3 = (1,1,1,1) \in N^\perp$ som är vinkelrät mot w_1. Slutligen normerar vi vektorerna w_1 och w_3 och får en ON-bas i det ortogonala komplementet $N^\perp$ bestående av vektorerna $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$ och $e_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$. $\square$

10. Låt $P : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara den ortogonala projektionen på delrummet N i uppgift 7.

(a) Bestäm $P(w)$ för vektorn $w = (1,2,3,4)$. Bestäm även avståndet från N till w.

(b) Finn $P : s$ matris i standardbasen.

Lösning. Vi löser först del (b) av uppgiften.
(b) I uppgift 1 fann vi att vektorerna $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ och $e_2 = \frac{1}{2}(-1,1-1,1)$ utgör en ON-bas i delrummet N. Från en av vara satser följer då att för varje vektor $u \in \mathbb{E}^4$ gäller att

$$P(u) = (u \,|\, e_1)e_1 + (u \,|\, e_2)e_2 \qquad . \tag{2}$$

Låt $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ vara standardbasen i $\mathbb{E}^4$. Genom att tillämpa (1) på standardbasvektorerna får vi att

$$\begin{aligned}
P(s_1) &= (s_1 \,|\, e_1)e_1 + (s_1 \,|\, e_2)e_2 = \frac{1}{2}(1,0,-1,0) + \frac{1}{4}(-1)(-1,1,-1,1) = \\
&= \frac{1}{4}(3,-1,-1,-1) \\
P(s_2) &= (s_2 \,|\, e_1)e_1 + (s_2 \,|\, e_2)e_2 = \frac{1}{4}(-1,1-1,1) \\
P(s_3) &= (s_3 \,|\, e_1)e_1 + (s_3 \,|\, e_2)e_2 = \frac{1}{2}(-1)(1,0,-1,0) + \frac{1}{4}(-1)(-1,1,-1,1) = \\
&= \frac{1}{4}(-1,-1,3,-1) \\
P(s_4) &= (s_4 \,|\, e_1)e_1 + (s_4 \,|\, e_2)e_2 = \frac{1}{4}(-1,1,-1,1)
\end{aligned}$$

Det följer att P:s matris i standardbasen är

$$[P] = A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vi beräknar även $P(w)$ genom att tillämpa ekvation (1) på vektorn w. Vi får då

$$\begin{aligned}
P(w) &= (w \,|\, e_1)e_1 + (w \,|\, e_2)e_2 = ((1,2,3,4) \,|\, e_1)e_1 + ((1,2,3,4) \,|\, e_2)e_2 = \\
&= \frac{1}{2}(-2)(1,0,-1,0) + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (-1,1,-1,1) = \\
&= \frac{1}{2}(-3,1,1,1)
\end{aligned}$$

Avståndet från N till w är lika med längden av vektorn $w - P(w)$. Eftersom $w - P(w) = (1,2,3,4) - \frac{1}{2}(-3,1,1,1) = \frac{1}{2}(5,3,5,7)$ är avståndet lika med $\frac{1}{2}\sqrt{108} = 3\sqrt{3}$. $\square$

11. I $\mathbb{R}^3$ inför man en skalärprodukt så att vektorerna $v_1 = (0,2,1)$, $v_2 = (1,1,1)$ och $v_3 = (2,1,1)$ blir ortonormerade. Finn alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonala mot både $u_1 = (1,1,0)$ och $u_2 = (0,1,1)$ m.a.p. denna skalärprodukt.

Lösning. Vi börjar med att finna koordinater för vektorerna u_1 och u_2 i denna bas $\mathbf{v}$ som består av vektorerna v_1, v_2 och v_3. Låt $u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ och $u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$. Detta innebär att $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ är lösningen till ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

medan (μ_1, μ_2, μ_3) är lösningen till ekvationssystemet

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom dessa två ekvationssystem har samma koefficientmatris löser vi dem samtidigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\boxed{2} - 2\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\boxed{3} + \boxed{2}]{\boxed{1} + \boxed{2}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\boxed{2} + \boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto[(-1)\boxed{2}]{\boxed{1} \leftrightarrow \boxed{3}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Det följer att $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -3, 2)$ och $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 2, -1)$ dvs. att $u_1 = (1, -3, 2)_{\mathbf{v}}$ och $u_2 = (0, 2, -1)_{\mathbf{v}}$.
Låt $w = (a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{v}}$ vara en godtycklig vektor ur $\mathbb{R}^3$ uttryckt med hjälp av sina koordinater i basen $\mathbf{v}$. Eftersom basen $\mathbf{v}$ är ortonormerad i den givna skalärprodukten har vi, enligt en av våra satser, att

$$(w \,|\, u_1) = ((a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{v}} \,|\, (1, -3, 2)_{\mathbf{v}}) = 1 \cdot a_1 + (-3) \cdot a_2 + 2 \cdot a_3$$

och

$$(w \,|\, u_2) = ((a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{v}} \,|\, (0, 2, -1)_{\mathbf{v}}) = 2 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 \qquad .$$

Vektorn w är ortogonal mot u_1 och u_2 omm $(w \,|\, u_1) = 0$ och $(w \,|\, u_2) = 0$.
Detta ger oss ett ekvationssystem i obekanta a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} a_1 - 3a_2 + 2a_3 &= 0 \\ \qquad\quad 2a_2 - a_3 &= 0. \end{cases}$$

För att lösa detta ekvationssystem väljer vi t.ex. a_2 som parameter, $a_2 = t$, och får lösningen $(a_1, a_2, a_3) = (-t, t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Detta innebär att alla vektorer w i $\mathbb{R}^3$ ortogonala mot både u_1 och u_2 m.a.p. den givna skalärprodukten är på formen

$$\begin{aligned} w &= (a_1, a_2, a_3))_{\mathbf{v}} = (-t, t, 2t)_{\mathbf{v}} = -tv_1 + tv_2 + 2tv_3 = \\ &= t(-v_1 + v_2 + 2v_3) = t(-(0,2,1) + (1,1,1) + 2(2,1,1)) = \\ &= t(5,1,2), \qquad t \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

□

12. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är den linjära avbildning som geometrisk betyder en projektion av rummets vektorer på planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Projektionen är parallell med linjen $(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm F :s matris i standardbasen.

Lösning. Det är mycket enkelt att ge två vektorer, som spänner upp vårt plan, t.ex. $v_1 = (1, -1, 0)$ och $v_2 = (-2, 0, 1)$. Vektorn $v_3 = (1, -1, 1)$ är rikningsvektor för linjen. Då är F :s matris i basen $\{v_1, v_2, v_3\}$ uppenbart lika med

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformationsmatrisen T från standardbasen till (v_1, v_2, v_3) är, enligt definitionen,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är $A = [F] = TBT^{-1}$. Med hjälp av standardproceduren får man

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och } A = [F] = TBT^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativt:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

13. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär och uppfyller $F(u_1) = 2u_1$ och $F(u_2) = -u_2$, där (u_1, u_2) är den bas i $\mathbb{R}^2$ som ges av $u_1 = (-1, -1)$ och $u_2 = (1, 2)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

Lösning. Om $e_1,\ e_2$ är standardbasen i $\mathbb{R}^2$ gäller alltså att $u_1 = -e_1 - e_2$ och $u_2 = e_1 + 2e_2$. Genom att utnyttja lineariteten hos F får vi

$$\begin{aligned} -F(e_1) - F(e_2) &= F(u_1) = 2u_1 = -2e_1 - 2e_2 \\ F(e_1) + 2F(e_2) &= F(u_2) = -u_2 = -e_1 - 2e_2 \end{aligned}$$

Addition av vänster- och högerleden ger då

$$F(e_2) = F(e_1) + 2F(e_2) + (-F(e_1) - F(e_2)) = -e_1 - 2e_2 + (-2e_1 - 2e_2) = -3e_1 - 4e_2$$

ur vilket följer

$$F(e_1) = 2e_1 + 2e_2 - F(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_1 + 4e_2 = 5e_1 + 6e_2$$

Standardmatrisen för F är alltså

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Alternativ lösning: Matrisen för basbytet från standardbasen till basen $u_1,\ u_2$ är

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

I basen $u_1,\ u_2$ har F uppenbarligen matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen A för F ges därför av

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

□

14. $\mathcal{P}_3$ är det linjära rummet som består av alla reella polynom $p(t)$ av grad ≤ 3.

(i) Visa att avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $F(p(t)) = (t+1)p'(t) - 2p(t)$ är linjär.

(ii) Finn F :s matris i basen $1,\ t,\ t^2,\ t^3$.

(iii) Finn en bas i F :s värderum och i F :s nollrum. (Obs! Basernas vektorer skall anges som polynom.)

(iv) Är F bijektiv? Förklara svaret.

Lösning. För polynom p, h har vi $F(p(t)+h(t)) = (t+1)(p(t)+h(t))' - 2(p(t)+h(t)) = ((t+1)p'(t) - 2p(t)) + ((t+1)h'(t) - 2h(t)) = F(p(t)) + F(h(t))$ ty $(f+g)' = f' + g'$. På samma sätt får vi $F(\lambda p(t)) = (t+1)(\lambda p(t))' - 2\lambda p(t) = \lambda((t+1)p'(t) - 2p(t)) = \lambda F(p(t))$ ty $(\lambda f)' = \lambda f'$. Det innebär att F är linjär.
$F(1) = -2$, $F(t) = 1 - t$, $F(t^2) = 2t$, $F(t^3) = 3t^2 + t^3$, vilket innebär att F :s matris i denna bas är

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Från A får man omedelbart att F :s värderum spänns upp av t.ex. $F(1) = -2$, $F(t) = 1 - t$ och $F(t^3) = 3t^2 + t^3$.
För att bestämma en bas i F :s nollrum, måste vi lösa det homogena systemet av linjära ekvationer med matrisen A. Med hjälp av Gausselimination reduceras A till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och vi kan skriva lösningar som $(a, 2a, a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. En bas i F :s nollrum är t.ex. $(1, 2, 1, 0)$ som motsvarar polynomet $(1 + 2t + t^2)$.
Eftersom F :s nollrum är inte trivialt, är F inte injektiv och därmed inte bijektiv heller. $\square$

15. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 14 & -3 & -8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Visa att F är diagonaliserbar. Bestäm en bas i $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer till F. Bestäm en inverterbar matris C och en diagonalmatris D sådana att $C^{-1}AC = D$. Finn tal λ_1, λ_2, λ_3 och projektionsmatriser P_1, P_2, P_3 sådana att

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3, \quad I = P_1 + P_2 + P_3 \quad \text{och} \quad P_i P_j = 0 \quad \text{då} \quad i \neq j$$

Här är I är enhetsmatrisen och P sägs vara en projektionsmatris om $P^2 = P$.

Lösning. Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -4 \\ 14 & -3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 3-\lambda & -3-\lambda & -8 \\ 3-\lambda & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3-\lambda & -8 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[8 - (3+\lambda)(3-\lambda)] = (3-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Motsvarande egenvektorer ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 14 & -6 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = x \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 14 & -4 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 0 & -4 & 0 \\ 14 & -2 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Den sökta transformationsmatrisen C och dess invers är därför

$$C = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \mathbf{w}_3^T \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrisen D har egenvärdena 3, 1, -1 i diagonalen. Projektionsmatriserna är slutligen

$$P_1 = \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (5,\ -1,\ -3) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-3,\ 1,\ 2) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \mathbf{v}_3 \mathbf{w}_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2,\ -1,\ -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

□

16. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F? Ange i förekommande fall en sådan bas.

(ii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. (i) F har en ON-bas av egenvektorer precis då A är symmetrisk, vilket inträffar om och endast om $a = 0$. Då gäller att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Alltså gäller $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. I det senare fallet uppfyller egenvektorerna $x + y = 0$. En ON-bas i egenrummet är därför t.ex. $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$. Då $\mathbf{v}_1$ måste vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ följer att (t.ex.) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$.

(ii) I de återstående fallen ($a \neq 0$) ges egenvärdena av

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 1 & 2-\lambda & -a \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -a \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -a \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -a \\ a & -a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a \\ -a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1+a-\lambda)(1-a-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + a$, $\lambda_3 = 1 - a$. Egenvärdena är distinkta då $a \notin \{2, -2\}$, vilket medför att F är diagonaliserbar för dessa a–värden.

Egenvektorerna ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & -a & 0 \\ a & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 0 \\ a & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = (2-a^2)t \\ z = at \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 1 & a & 0 \\ 1 & 1-a & -a & 0 \\ a & 0 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & a & 0 \\ 1 & 1+a & -a & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{t.ex} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Av

$$\det(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2-a^2 & -1 & -1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4-a^2 & 0 & -1 \\ 2+a & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(4-a^2) = 0$$

då $a = \pm 2$, följer att F ej är diagonaliserbar för $a = \pm 2$. Uttryckt på annat sätt: Då $a = 2$ gäller $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ och $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 2) = 2\mathbf{v}_2$. Då $a = -2$ gäller $\lambda_1 = \lambda_3 = 3$ och $\mathbf{v}_1 = (2, -2, -2) = 2\mathbf{v}_3$. Då $a = \pm 2$ finns alltså ingen bas av egenvektorer.

□

17. En yta i $\mathbb{E}^3$ ges av ekvationen

$$4x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 2$$

Visa att ytan är en rotationsyta. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo.

Lösning. Den kvadratiska formen i vänsterledet har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8+\lambda & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda - 8] = (8-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = -1$. Ytans ekvation i principalkoordinaterna är därför $8\tilde{x}^2 + 8\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 2$, varav framgår att ytan är en enmantlad rotationshyperboloid med rotationsaxeln parallell med $\mathbf{v}_3$. Avståndet till origo är $1/2$. Vi måste beräkna $\mathbf{v}_3$, vilket enklast görs genom att betrakta ekvationssystemet för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0 = 2x + 2y - z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Då $\mathbf{v}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ följer av ovanstående ekvation att $\mathbf{v}_3 = (2, 2, -1)/3$. Rotationsaxeln är alltså den räta linjen med ekvationen $(x, y, z) = t(2, 2, -1)$. □

18. $\mathcal{P}_3$ är det linjära rummet av polynom av grad högst 3. En linjär operator F på $\mathcal{P}_3$ definieras genom

$$F(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t).$$

Avgör om F är diagonaliserbar och bestäm i så fall en bas i $\mathcal{P}_3$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. Vi har

$$F(a + bt + ct^2 + dt^3) = (2c + 6dt) + (1+t)(b + 2ct + 3dt^2) + 2(a + bt + ct^2 + dt^3) =$$

$$= (2a + b + 2c) + (3b + 2c + 6d)t + (4c + 3d)t^2 + 5dt^3$$

varur framgår att standardmatrisen är

$$[F] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Då standardmatrisen är triangulär kan vi direkt avläsa att egenvärdena till F är $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 3$ och $\lambda_4 = 2$. Vi har alltså fyra distinkta egenvärden, vilket medför att F är diagonaliserbar.
Egenvektorerna till $\lambda_1 = 5$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 4s \\ x_2 = 6s \\ x_3 = 3s \\ x_4 = s \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alltså $\mathbf{v}_1 = 4 + 6t + 3t^2 + t^3$.
Egenvektorerna till $\lambda_2 = 4$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 2s \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså $\mathbf{v}_2 = 2 + 2t + t^2$.
Egenvektorerna till $\lambda_3 = 3$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså $\mathbf{v}_3 = 1 + t$.
Egenvektorerna till $\lambda_4 = 2$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså $\mathbf{v}_4 = 1$, så en bas i $\mathcal{P}_2$ av egenvektorer till F är

$$\{4 + 6t + 3t^2 + t^3,\ 2 + 2t + t^2,\ 1 + t,\ 1\}$$

$\square$

19. M_{22} är rummet av alla reella 2×2-matriser. Låt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En linjär operator F på M_{22} definieras genom $F(X) = BX - XB$ för $X \in M_{22}$.

(a) Bestäm matrisen för F i standardbasen i M_{22}.

(b) Bestäm en bas i F:s värderum och en bas i F:s nollrum.

Lösning. Vi har

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 0 \\ x_3+x_4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_2 & x_2 \\ x_1-x_3-x_4 & x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (x_1-x_3-x_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Av detta kan vi utläsa att F har standardmatisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser också att

$$V(F) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

samt att $X \in N(F) \iff x_1 = x_3 + x_4,\ x_2 = 0$

$$\iff \quad X = \begin{pmatrix} x_3+x_4 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_3B + x_4I.$$

Alltså har vi $N(F) = \operatorname{span}\{B, I\}$.
Alternativt kan man observera att $F(B) = BB - BB = 0$ och $F(I) = BI - IB = 0$ så både B och I tillhör F:s nollrum. Då $V(F)$ har dimension 2 följer att $N(F)$ har dimension $4-2=2$. Alltså är $\{B, I\}$ en bas i $N(F)$. □

20. Vi vet att radrummet row$A$ och kolonnrummet col$A$ till godtycklig $m \times n$-matris A har samma dimension $= p$.

(i) Låt M, L vara delrum till $\mathbb{R}^m$ respektive $\mathbb{R}^n$ med samma dimension $= p$. Visa att om U är en inverterbar $p \times p$-matris, C är en $m \times p$-matris vars kolonner utgör en bas i M, medan R är en $p \times n$-matris vars rader utgör en bas i L så kommer matrisen A som ges av

$$A = CUR$$

att ha radrummet L och kolonnrummet M.

(ii) Visa att om kolonnerna i matrisen C utgör en bas i col$A$ samtidigt som raderna i matrisen R utgör en bas i row$A$ så finns en entydigt bestämd inverterbar matris U sådan att $A = CUR$.

Lösning. Matriserna C och R har full rang ($= p$). Av detta följer att det finns en vänsterinvers $\tilde{C}$ till C och en högerinvers $\tilde{R}$ till R (d.v.s $\tilde{C}C = I_p = R\tilde{R}$). Vi har även sambanden col$A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, row$A = \{\mathbf{y}A \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}$, $M = \text{col}C = \{C\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p\}$ och $L = \text{row}R = \{\mathbf{u}R \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p\}$. För två $m \times n-$matriser A, B gäller: $B = A \Leftrightarrow B\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}B = \mathbf{y}A$ för alla $\mathbf{y}$. Matriserna $P = C\tilde{C}$ och $Q = \tilde{R}R$ är så kallade projektionsmatriser d.v.s $P^2 = P$ och $Q^2 = Q$.

(i) Av likheterna $A\mathbf{x} = C(UR\mathbf{x}) \in M$, $C\mathbf{v} = CUR\tilde{R}U^{-1}\mathbf{v} = A\tilde{R}U^{-1}\mathbf{v} \in \mathrm{col}A$, $\mathbf{y}A = (\mathbf{y}CU)R \in L$ och $\mathbf{u}R = (\mathbf{u}U^{-1}\tilde{C})(CUR) = (\mathbf{u}U^{-1}\tilde{C})A \in \mathrm{row}A$ följer genast att $M = \mathrm{col}A$ och $L = \mathrm{row}A$.

(ii) Låt $\tilde{R}$ vara en högerinvers till R och låt $\tilde{C}$ vara en vänsterinvers till C. Dessutom gäller att $C\tilde{C}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \mathrm{col}A$ och $\mathbf{u}\tilde{R}R = \mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathrm{row}A$.

$\square$