UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Styf

LINJÄR ALGEBRA II

Lösta problem

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (2,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (3,1,2,2)$, $u_4 = (1,1,1,0)$, $u_5 = (1,0,-2,1)$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.*

(ii) För vilka värden på den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ delrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn v i den bas som du valde i del (i) av uppgiften.

2. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (1,-1,0,1)$, $u_2 = (2,1,1,-1)$, $u_3 = (0,3,1,-3)$, $u_4 = (1,2,3,1)$, $u_5 = (1,-1,2,4)$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.*

(ii) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (4, a+3, 5, a-4)$ delrummet M? Ange, för dessa värden på a, koordinaterna för vektorn v i den bas som du valde i del (i) av uppgiften.

3. Vektorerna $u_1 = (1,2,1,-2)$, $u_2 = (-2,-1,3,1)$, $u_3 = (-1,1,4,-1)$, $u_4 = (3,3,-2,-3)$, $u_5 = (1,0,-1,0)$ spänner upp ett är delrum M till $\mathbb{R}^4$.

(i) Finn en bas i M *bland dessa vektorer.* Ange koordinaterna av de givna vektorerna i denna bas.

(ii) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (a, -1, 5-a, 1)$ delrummet M?

4. A och B är två delrum till $\mathbb{R}^4$. A spänns upp av vektorerna $(1,2,0,1)$ och $(2,3,1,1)$, medan B spänns upp av vektorerna $(1,1,-1,0)$ och $(2,1,-1,-1)$. Bestäm en bas i skärningsrummet $A \cap B$.

5. Givna är två baser i $\mathbb{R}^2$. Basen $\mathbf{u}$ består av vektorerna $u_1 = (-1,-1)$, $u_2 = (1,2)$, medan basen $\mathbf{v}$ består av vektorerna $v_1 = (1,2)$ och $v_2 = (3,5)$. Finn transformationsmatrisen T från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$. Bestäm koordinaterna i basen $\mathbf{v}$ för den vektor w som i basen $\mathbf{u}$ ges av $w = -2u_1 + 3u_2$.

6. Givna är två baser i $\mathbb{R}^3$: basen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ med $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,2,1)$, $u_3 = (2,1,-3)$, och basen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ med $v_1 = (1,3,1)$, $v_2 = (2,-1,1)$, $v_3 = (-1,1,-1)$. Bestäm transformationsmatrisen T från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$. Finn även koordinater i basen $\mathbf{u}$ för den vektor w som i basen $\mathbf{v}$ har koordinater $(2,1,1)$.

7. Låt N vara det delrum i $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ och $u_2 = (1, -1, 1, -1)$. Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet till N.

8. Bestäm projektionen p av vektorn $w = (1, 2, 3, 4)$ på delrummet N i uppgift 7.

9. Delrummet N till $\mathbb{E}^4$ spänns upp av de fyra vektorerna $u_1 = (1, -1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, -4, 1)$, $u_3 = (1, 1, -3, 1)$ och $u_4 = (3, 1, -5, 1)$. Bestäm en ON-bas i rummet N och en ON-bas i det ortogonala komplementet $N^\perp$.

10. Låt $P : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara den ortogonala projektionen på delrummet N i uppgift 7.

(a) Bestäm $P(w)$ för vektorn $w = (1, 2, 3, 4)$. Bestäm även avståndet från N till w.

(b) Finn $P : s$ matris i standardbasen.

11. I $\mathbb{R}^3$ inför man en skalärprodukt så att vektorerna $v_1 = (0, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ och $v_3 = (2, 1, 1)$ blir ortonormerade. Finn alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonala mot både $u_1 = (1, 1, 0)$ och $u_2 = (0, 1, 1)$ m.a.p. denna skalärprodukt.

12. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är den linjära avbildning som geometrisk betyder en projektion av rummets vektorer på planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Projektionen är parallell med linjen $(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm F :s matris i standardbasen.

13. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär och uppfyller $F(u_1) = 2u_1$ och $F(u_2) = -u_2$, där (u_1, u_2) är den bas i $\mathbb{R}^2$ som ges av $u_1 = (-1, -1)$ och $u_2 = (1, 2)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

14. $\mathcal{P}_3$ är det linjära rummet som består av alla reella polynom $p(t)$ av grad ≤ 3.

(i) Visa att avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $F(p(t)) = (t + 1)p'(t) - 2p(t)$ är linjär.

(ii) Finn F :s matris i basen 1, t, t^2, t^3.

(iii) Finn en bas i F :s värderum och i F :s nollrum. (Obs! Basernas vektorer skall anges som polynom.)

(iv) Är F bijektiv? Förklara svaret.

15. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 14 & -3 & -8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Visa att F är diagonaliserbar. Bestäm en bas i $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer till F. Bestäm en inverterbar matris C och en diagonalmatris D sådana att $C^{-1}AC = D$. Finn tal λ_1, λ_2, λ_3 och projektionsmatriser P_1, P_2, P_3 sådana att

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3, \quad I = P_1 + P_2 + P_3 \quad \text{och} \quad P_i P_j = 0 \quad \text{då} \quad i \neq j$$

Här är I är enhetsmatrisen och P sägs vara en projektionsmatris om $P^2 = P$.

16. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F? Ange i förekommande fall en sådan bas.

(ii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F.

17. En yta i $\mathbb{E}^3$ ges av ekvationen

$$4x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 2$$

Visa att ytan är en rotationsyta. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo.

18. $\mathcal{P}_3$ är det linjära rummet av polynom av grad högst 3. En linjär operator F på $\mathcal{P}_3$ definieras genom

$$F(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t).$$

Avgör om F är diagonaliserbar och bestäm i så fall en bas i $\mathcal{P}_3$ bestående av egenvektorer till F.

19. M_{22} är rummet av alla reella 2×2-matriser. Låt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En linjär operator F på M_{22} definieras genom $F(X) = BX - XB$ för $X \in M_{22}$.

(a) Bestäm matrisen för F i standardbasen i M_{22}.

(b) Bestäm en bas i F:s värderum och en bas i F:s nollrum.

20. Vi vet att radrummet row$A$ och kolonnrummet col$A$ till godtycklig $m \times n$-matris A har samma dimension $= p$.

(i) Låt M, L vara delrum till $\mathbb{R}^m$ respektive $\mathbb{R}^n$ med samma dimension $= p$. Visa att om U är en inverterbar $p \times p$-matris, C är en $m \times p$-matris vars kolonner utgör en bas i M, medan R är en $p \times n$-matris vars rader utgör en bas i L så kommer matrisen A som ges av

$$A = CUR$$

att ha radrummet L och kolonnrummet M.

(ii) Visa att om kolonnerna i matrisen C utgör en bas i col$A$ samtidigt som raderna i matrisen R utgör en bas i row$A$ så finns en entydigt bestämd inverterbar matris U sådan att $A = CUR$.