Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2010-08-31

Kryssproblem (redovisningsuppgifter).

Till var och en av de åtta lektionerna hör tre problem som du skall försöka lösa.

När du kommer till lektionen skall du, på en krysslista som tillhandahålls av läraren, kryssa i de problem som du, helt eller delvis, har lyckats lösa. Lösningarna skall sedan redovisas och betygsättas på lektionen enligt följande:

Klassen kommer, på sätt vi finner lämpligt, att indelas i grupper om tre personer. Dessa grupper kommer att vara intakta under hela kursen. Om, till exempel, klassen består av 30 studenter så får vi tio grupper; A B C D E F G H I K. Innan lektionens början lottar läraren ut fem av dessa grupper, säg A B E H K. Dessa grupper skall presentera lösningar på kryssproblemen. Lösningarna, som skall presenteras både skriftligt och muntligt, skall granskas och betygssättas av de återstående grupperna, i detta fall alltså C D F G I. Antag att en ytterligare lottning, som görs av läraren innan lektionsstart, utfaller så att A B E H K skall betygsättas av F C I G respektive D. Efter en omflyttning kommer vi då att ha fem par av grupper A-F B-C E-I H-I och K-D, som förhoppningsvis kan genomföra redovisningen utan att störa varandra alltför mycket.

Under nästföljande lektion byter grupperna roller så att grupperna C D F G I presenterar lösningar och grupperna A B E H K sätter betyg. Vi gör en lottning så att man inte i förväg vet vilken grupp som sköter betygsättningen.

Hur redovisningen/betygsättningen i detalj skall gå till är något vi får diskutera. En modell kan vara:

Antag att A skall betygsättas av F. Medlemmarna, F1, F2 och F3, av grupp F har på förhand delat upp problemen så att, säg, F1 betygsätter problem 2, F2 betygsätter problem 1 och F3 betygsätter problem 3. I förväg har var och en av F1, F2 och F3 (i samråd?) gjort skriftliga betygsmallar för de problem man lyckats lösa. Om, till exempel, var och en av F1, F2 och F3 lyckats lösa alla tre problemen kommer varje gruppmedlem vid lektionens början ha tre betygmallar liggande framför sig. Betyget (eller poängen) på en lösning är någon av siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5. Av mallen för problemet skall framgå vilken prestation som krävs för respektive betyg.

För att lektionerna ska kunna fungera effektivt måste du uppmärksamma följande:

- Gör, **innan lektionen**, en lättläst skriftlig lösning, på A4-ark, av varje problem som du, helt eller delvis, kan lösa (varje problem du tänker kryssa alltså). Använd inte rödpenna (men ta gärna med en rödpenna till lektionen)! Överst på **varje ark** skall din klass, lektionsnummer, problemnummer och grupptillhörighet, samt lösningssidan anges. Exempelvis:

ES3B, lektion 1, problem 3	Trazan Apansson	A1 -	sid 2 av 2

Här betyder A1 att Trazan Apansson är medlem nummer ett (av tre) av grupp A. Efter A1 - har utrymme lämnats för att skriva in beteckningen på betygsättaren **om det blir så att Trazan Apansson ska redovisa sin lösning av problem 3**. Om så blir fallet och F3 (den tredje medlemmen av grupp F) väljs ut att sätta betyg, så fyller Trazan i detta så att sidhuvudet blir

ES3B, lektion 1, problem 3	Trazan Apansson	A1 - F3	sid 2 av 2

Skriv bara på arkets ena sida. Lämna ordentligt med utrymme för kommentarer på varje sida. Börja nytt problem på nytt ark.

- Gör, **innan lektionen**, en skriftlig betygsmall, på separat ark, till varje problem som du, helt eller delvis, kan lösa. Överst på arket skall din klass, lektionsnummer, problemnummer, namn och grupptillhörighet anges. Exempelvis:

ES3B, lektion 1, problem 3	Apan Trazansson	F3	betygsmall

Givetvis kan man inte betygsätta ett problem som man inte, åtminstone delvis, lyckats lösa, så det kan uppkomma en del udda situationer, exempelvis att en student får betygsätta två problem eller att läraren får hoppa in.

Redovisningen, i vårt exempel, börjar med att F3 ber A1 (om A1 kryssat detta problem!) att redovisa lösningen av problem 3. A1 överlämnar sin skriftliga lösning till F3 och går sedan igenom lösningen muntligt. Under redovisningen noterar F3 (och övriga medlemmar av grupp F) lösningens förtjänster och brister och ställer frågor till A1 om något är oklart. F3 skriver, med rött, in kommentarer till lösningen. När redovisningen är klar bestämmer F3 ett betyg som skrivs in i slutet av lösningen. F3 överlämnar sedan A1:s skriftliga, vid det här laget röd-kommenterade, lösning av problem 3, tillsammans med sin betygsmall för problem 3, till läraren. När läraren har gått igenom de inlämnade papperen återfår A1 och F3 sin lösning respektive betygsmall.

Likadant gör man förstås med de båda andra problemen.

För att underlätta för läraren skall grupp F göra en sammanställning av redovisningsresultatet, som bifogas till de övriga papperen. Sidhuvudet på sammanfattningen kan, till exempel, ha formatet

ES3B, lektion 1	A - F	redovisning och betygsättning

Själva sammanfattningen kan, till exempel, se ut som

Problem 1: A2 - F1, betyg 3

Problem 2: A3 - F2, betyg 4

Problem 3: A1 - F3, betyg 5

Hela redovisningen skall vara avklarad under den första halvan av lektionen. Det bör faktiskt gå mycket fortare än så! Under min första lektion tog jag hand om betygsättningen av en hel grupp. Hela proceduren (tre redovisningar/betygsättningar) gick på mindre än en kvart. Det är mycket viktigt att vi har ordentligt med tid för frågor och problemdemonstration.

Om du kryssat minst 50%, respektive minst 80%, av redovisningsuppgifterna får du 1, respektive 2, bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Betyget du får på kursen kommer bara att bero på hur du lyckas på sluttentan. Betygen du får (eller ger) under lektionerna kommer inte att vägas in på något sätt. Givetvis kommer din aktivitet (eller brist på aktivitet) under lektionerna att i hög grad påverka ditt kursbetyg. Har du två bonuspoäng ligger du mycket bra till!

Bonuspoängen från kryssuppgifterna tillgodoräknas enbart vid första tentamenstillfället.

Uppgifter till lektion nr 1:

1. Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösning. Vi använder standardmetoden för invertering och får

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = (3I \mid 3A^{-1})$$

Alltså har vi

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

2. Π är planet $x - y + 2z = 3$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, -1, 4)$, $B = (2, 4, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

Lösning. Vi har $\mathbf{w} = (2, 4, 0) - (1, -1, 4) = (1, 5, -4)$ och planets normal är $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Vektorn $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$, alltså:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{-12}{6}\mathbf{n} = -2\mathbf{n} = (-2, 2, -4)$$

Av detta följer

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = (3, 3, 0).$$

□

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -a-1 \\ a+5 \\ a+3 \\ 4a \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm pivotkolonnerna i A och skriv övriga kolonner i A som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

(b) Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

(c) Avgör för vilka värden på a som ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och lös systemet i sådana fall. Skriv, när så är möjligt, $\mathbf{b}$ som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A.

Lösning. Vi löser allt i ett svep. Med några radoperationer får vi

$$(A \mid \mathbf{b}) \sim (C \mid \mathbf{h}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2a+6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

För det homogena systemet gäller att $(A \mid \vec{0}) \sim (C \mid \vec{0})$.

(a) Av C framgår att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$. Eftersom

$$\mathbf{c}_3 = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{c}_4 = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{c}_5 = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$$

gäller vidare att

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$$

(b) Av $(C \mid \vec{0})$ ser vi att lösningarna till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges av

$$x_1 = x_3 - 2x_4 - x_5, \quad x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5, \quad \text{där} \quad x_3, x_4, x_5 \quad \text{är godtyckliga.}$$

Alltså har systemet lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 - x_5 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Av $(C \mid \mathbf{h})$ ser vi att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om och endast om $a = -4$. Då $a = -4$ har vi

$$(C \mid \mathbf{h}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I detta fall ges därför lösningarna till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av

$$x_1 = -2 + x_3 - 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 3 - x_3 + x_4 - 2x_5, \quad \text{där} \quad x_3, x_4, x_5 \quad \text{är godtyckliga.}$$

Alltså

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 3 - x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Uppgifter till lektion nr 2:

1. Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Visa att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ är baser i $\mathbb{R}^3$.
- För vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{w}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Bestäm koordinaterna för vektorn

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

  med avseende på (a) standardbasen (b) basen $\underline{b}$ och (c) basen $\underline{c}$.

Lösning. Vi tar först fram standardkoordinaterna för $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

För att få fram $\mathbf{r}_b$ och $\mathbf{r}_c$ löser vi de båda (på matrisform skrivna) ekvationssystemen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{r})$ och $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \mid \mathbf{r})$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$\mathbf{r}_b = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_c = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Av lösningarna framgår även att matriserna $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ och $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ är inverterbara, vilket medför att $\underline{b}$ och $\underline{c}$ är baser i $\mathbb{R}^3$. $\square$

2. Vi påminner om att det linjära höljet av tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ betecknas $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Två delrum, M och N, till $\mathbb{R}^4$ definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad N = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

Bestäm en bas i skärningsrummet $M \cap N$.

Lösning. Låt

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En vektor $\mathbf{w}$ ligger i $M \cap N$ om och endast om det existerar tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ sådana att $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ och $\mathbf{w} = \lambda_4 \mathbf{a}_4 + \lambda_5 \mathbf{a}_5 + \lambda_6 \mathbf{a}_6$. Av detta följer att

$$\vec{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + (-\lambda_4)\mathbf{a}_4 + (-\lambda_5)\mathbf{a}_5 + (-\lambda_6)\mathbf{a}_6$$

Alltså är $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_3$, $x_4 = -\lambda_4$, $x_5 = -\lambda_5$, $x_6 = -\lambda_6$ en lösning till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$, där

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -2 & -1 & -7 & -2 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Omvänt gäller att om $\mathbf{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_4, -\lambda_5, -\lambda_6)^t$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och vi sätter $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ så gäller även $\mathbf{w} = \lambda_4 \mathbf{a}_4 + \lambda_5 \mathbf{a}_5 + \lambda_6 \mathbf{a}_6$, alltså $\mathbf{w} \in M \cap N$. Vi löser därför $A\mathbf{x} = \vec{0}$:

$$(A \mid \vec{0}) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Det framgår av den högra matrisen att x_5, x_6 är fria obekanta och

$$x_1 = -x_6, \qquad x_2 = -x_5, \qquad x_3 = -x_5 - x_6, \qquad x_4 = x_5 - x_6.$$

Vi sätter $x_5 = s,\ x_6 = t$ och får $x_4 = s - t$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (-x_4)\mathbf{a}_4 + (-x_5)\mathbf{a}_5 + (-x_6)\mathbf{a}_6 = (t-s)\mathbf{a}_4 + (-s)\mathbf{a}_5 + (-t)\mathbf{a}_6 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ t-s \\ s-t \\ t-s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2s \\ -4s \\ 7s \\ -8s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 2t \\ -3t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2s-t \\ -5s-t \\ 8s+t \\ -9s-2t \end{pmatrix} = (-s)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + (-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En bas i $M \cap N$ är därför $((2,5,-8,9)^t, (1,1,-1,2)^t)$. □

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 3 & -49 & -47 \\ 9 & 3 & -3 & 39 & 39 \\ -6 & -2 & 2 & -26 & -26 \\ -3 & -1 & 1 & -13 & -13 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i A:s kolonn-, rad- och nollrum. Utvidga basen i kolonnrummet, med hjälp av standardbasvektorer, till en bas i $\mathbb{R}^4$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i radrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i nollrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$.

Lösning. Vi löser alla problemen i ett svep genom att bilda matrisen

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} -11 & -4 & 3 & -49 & -47 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 & 39 & 39 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 2 & -26 & -26 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -13 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ett antal radoperationer ger oss

$$(C \mid H) = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Pivotkolonnerna i matrisen C är $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2$ och pivotkolonnerna i matrisen H är $\mathbf{h}_2,\ \mathbf{h}_3$. Detta innebär att $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ är en bas i A:s kolonnrum och att om vi kompletterar dessa båda vektorer med standardbasvektorerna $\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ (men ej $\mathbf{e}_1$) så får vi en bas i $\mathbb{R}^4$. Nollrummet $N(A)$ utgörs av lösningarna till $A\mathbf{x} = \vec{0}$. Samma radoperationer som ovan ger oss

$$(A \mid 0) \sim (C \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser av den högra matrisen att x_3, x_4, x_5 är fria obekanta och

$$x_1 = x_3 - 3x_4 - 5x_5, \qquad x_2 = -2x_3 - 4x_4 + 2x_5$$

$N(A)$ består alltså av alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ sådana att

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_4 - 5x_5 \\ -2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_5\mathbf{v}_5$$

där x_3, x_4, x_5 är godtyckliga. En bas i $N(A)$ är $\underline{v} = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$. Om vi kompletterar dessa tre vektorer med standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ så får vi en bas i $\mathbb{R}^5$.

De nollskilda raderna i C, alltså $(1, 0, -1, 3, 5), (0, 1, 2, 4, -2)$, utgör en bas i A:s radrum (som ej förändras vid radoperationer). Eftersom de båda första kolonnerna i C är pivotkolonner (eller, vilket är ekvivalent, x_3, x_4, x_5 är fria obekanta i $A\mathbf{x} = \vec{0}$) kan vi komplettera de nollskilda raderna i C med standardbasvektorerna $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$, till en bas i R^5. $\square$

Uppgifter till lektion nr 3:

1. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)^t$ och $\mathbf{u}_2 = (2,1,2,1)^t$. Bestäm ON-baser i M och det ortogonala komplementet $M^\perp$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (0,1,0,0)^t$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^\perp$. Bestäm även avstånden från $\mathbf{w}$ till M och från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$.

Lösning. För att få en ON-bas i M kör vi Gram-Schmidt på $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$:

- Först sätter vi $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1$. Vi har då $\|\mathbf{b}_1\| = |\mathbf{b}_1| = 2$.
- I andra steget sätter vi

$$\mathbf{b}_2' = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{3}{2}\,\mathbf{b}_1 \qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  För att slippa bråk sätter vi $\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_2' = (1,-1,1,-1)^t$. Vi har då $\|\mathbf{b}_2\| = |\mathbf{b}_2| = 2$ och $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$.
- En ON-bas i M är $\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{b}_1, \frac{1}{2}\,\mathbf{b}_2\right)$

För ortogonala komplementet har vi $M^\perp = N(A)$, där A är matrisen med $\mathbf{b}_1^t, \mathbf{b}_2^t$ (eller $\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t$) som rader, alltså

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ligger därför i $M^\perp$ om och endast om $x_1 = -x_3$ och $x_2 = -x_4$, där x_3, x_4 är godtyckliga. Detta ger

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (-x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-x_3)\,\mathbf{b}_3 + (-x_4)\,\mathbf{b}_4$$

Här hade vi tur, eftersom $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ råkade bli ortogonala. En ON-bas i $M^\perp$ är $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{b}_3, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{b}_4\right)$ (ty $\|\mathbf{b}_3\| = |\mathbf{b}_3| = \sqrt{2}$ och $\|\mathbf{b}_4\| = |\mathbf{b}_4| = \sqrt{2}$).

Vektorn $\mathbf{u}$ är lika med ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på M. Alltså gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \frac{1}{4}\,\mathbf{b}_1 - \frac{1}{4}\,\mathbf{b}_2 \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

För vektorn $\mathbf{v}$ gäller att

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avståndet från $\mathbf{w}$ till M är lika med $|\mathbf{w} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och avståndet från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$ är lika med $|\mathbf{w} - \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

2. Delrummet M till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 : 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}$$

Bestäm ON-baser i M och $M^\perp$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (0, 1, 0, 0)^t$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^\perp$. Bestäm även avstånden från $\mathbf{w}$ till M och från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$.

Lösning. Vi ser att $M = N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4 : A\mathbf{x} = \vec{0}\}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att lösningarna till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges av $5x_1 = -x_3 + x_4$ och $5x_2 = 2x_3 - 7x_4$. Sätter vi $x_3 = 5s$, $x_4 = 5t$ så får vi $x_1 = -s + t$, $x_2 = 2s - 7t$, vilket ger $\mathbf{x} = (-s + t, 2s - 7t, 5s, 5t)^T$. Två fria obekanta innebär att $N(A) = M$ har dimension 2. Vi vill nu finna en ortogonalbas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ i M. Genom att sätta $s = 1$, $t = 0$ får vi $\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 5, 0)^T$. Nu vill vi välja s, t så att $\mathbf{b}_2 = (-s + t, 2s - 7t, 5s, 5t)^T$ blir vinkelrät mot $\mathbf{b}_1$, alltså

$$0 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -s + t \\ 2s - 7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = s - t + 4s - 14t + 25s = 30s - 15t = 15(2s - t)$$

En lösning fås genom att välja $s = 1$, $t = 2$, vilket ger $\mathbf{b}_2 = (1, -12, 5, 10)^T$. Vi har $\|\mathbf{b}_1\|^2 = 1 + 4 + 25 = 30$ och $\|\mathbf{b}_2\|^2 = 1 + 144 + 25 + 100 = 270$. En ON-bas i M är alltså $\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{b}_1, \frac{1}{3\sqrt{30}}\mathbf{b}_2\right)$.

Eftersom M utgörs av alla vektorer som är vinkelräta mot raderna i A så måste $M^\perp$ vara linjära höljet av transponaten av raderna i A, alltså $M^\perp = [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, där $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{u}_4 = (1, -2, 1, -3)^T$. Med Gram-Schmidt får vi $\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3$ och

$$\mathbf{b}_4' = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \rangle}\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_4 - \frac{-3}{6}\mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

För att slippa bråk sätter vi $\mathbf{b}_4 = 2\mathbf{b}_4' = (4, -3, 2, -5)^T$. Då $\mathbf{b}_3^2 = 6$ och $\mathbf{b}_4^2 = 54$ följer att $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{b}_3, \frac{1}{3\sqrt{6}}\mathbf{b}_4\right)$ är en ON-bas i $M^\perp$.

Vektorn $\mathbf{v}$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på $M^\perp$. Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{b}_3\rangle}{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3\rangle}\,\mathbf{b}_3 + \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{b}_4\rangle}{\langle \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4\rangle}\,\mathbf{b}_4 = \frac{1}{6}\,\mathbf{b}_3 - \frac{1}{18}\,\mathbf{b}_4 \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

För $\mathbf{u}$ har vi

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Här är det viktigt att kontrollera att $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Avståndet från $\mathbf{w}$ till M är $|\mathbf{w} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Avståndet från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$ är $|\mathbf{w} - \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. □

3. Bestäm, med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet, maximum och minimum av

$$x_1 - x_2 + x_3 \quad \text{då} \quad x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 4$$

Lösning. Cauchy-Schwarz olikhet kan, för två nollskilda vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ i ett IP-rum, skrivas

$$-\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \le \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \le \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$$

Vi har likhet i den högra (vänstra) olikheten om och endast om $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$, där $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). Den inre produkt på $\mathbb{R}^3$ som nog passar bäst i detta problem är

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

ty för denna har vi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

och

$$x_1 - x_2 + x_3 = (1)\,x_1 + (-1)\,x_2 + 4(\tfrac{1}{4})\,x_3 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle, \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Här gäller att

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = (1)^2 + (-1)^2 + 4(\tfrac{1}{4})^2 = \frac{9}{4}$$

och problemet kan omformuleras som att vi ska finna max/min av

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle, \quad \text{då} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 4.$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger direkt att

$$-3 = -\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)(4)} \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = x_1 - x_2 + x_3 \leq \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)(4)} = 3$$

med likhet i den högra (vänstra) olikheten om och endast om $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$, där $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). Av

$$4 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \lambda \mathbf{a} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \frac{9}{4} \lambda^2$$

följer att $\lambda = \pm \frac{4}{3}$. Maximum (minimum) är alltså 3 (-3). Maximum (minimum) antas om och endast om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t = \frac{1}{3}(4, -4, 1)^t$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t = -\frac{1}{3}(4, -4, 1)^t$). $\square$

Uppgifter till lektion nr 4:

1. Låt $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala projektionen på M och $G : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i M.

(a) Rita en lämplig figur som visar att $G(\mathbf{x}) = 2F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$.

(b) Bestäm en ortogonalbas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i $\mathbb{E}^3$ sådan att $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ är en bas i M och $(\mathbf{b}_3)$ är en bas i $M^\perp$. Ange basbytesmatriserna (T_{eb} och T_{be}) mellan basen $\underline{b}$ och standardbasen $\underline{e}$.

(c) Bestäm standardmatriserna A och B för F respektive G. Det ska alltså gälla att

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$$

Lösning. (a) Kommer!

(b) En enkel vektor som uppfyller ekvationen $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ är $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)^t$. Varje vektor av formen $(x_1, 1, -1)^t$ är vinkelrät mot $\mathbf{b}_1$. Genom att välja $x_1 = 1$ får vi en vektor som dessutom uppfyller ekvationen $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Sätter vi $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$ bildar alltså $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ en ortogonalbas i M (som ju har dimension 2). Vektorn $\mathbf{b}_3 = (2, -1, 1)^t$ (koefficienterna i ekvationen) är vinkelrät mot både ($\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$), så $(\mathbf{b}_3)$ är en bas i $M^\perp$ och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ är en ortogonalbas i $\mathbb{E}^3$.
Vi har

$$\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{e} T_{eb}$$

Genom beräkning av $T_{eb}^{-1} = T_{be}$ får vi

$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{6}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{b} T_{be}$$

(c) Projektionsformeln ger

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\mathbf{b}_1^2}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^t + \frac{1}{\mathbf{b}_2^2}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^t\right)\mathbf{x}$$

av vilket följer att

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(0, 1, 1) + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1, 1, -1) \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Då $G(\mathbf{x}) = 2F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ får vi

$$B = 2A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

□

2. $\mathbb{R}^3$ förses med en inre produkt, $\langle -,- \rangle$, sådan att $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)^t$, $\mathbf{b}_2 = (1,2,3)^t$ och $\mathbf{b}_3 = (4,1,-1)^t$ bildar en ON-bas. Beräkna $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle$, för $i = 1,2,3$ och $k = 1,2,3$, där $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en matris C sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (C\mathbf{x}) \bullet (C\mathbf{y}), \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

där $\bullet$ betecknar standardskalärprodukten i $\mathbb{R}^3$. Ange basbytesmatriserna (T_{eb} och T_{be}) mellan basen $\underline{b}$ och standardbasen $\underline{e}$. Bestäm en ortogonalbas i $\mathbf{e}_2^{\perp}$.

Lösning. Vi ser direkt att

$$T_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ har unika koordinater i baserna $\underline{b}$ och $\underline{e}$:

$$\mathbf{x} = \xi_1 \, \mathbf{b}_1 + \xi_2 \, \mathbf{b}_2 + \xi_3 \, \mathbf{b}_3 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

För att uttrycka $\xi_{1,2,3}$ i $x_{1,2,3}$ ska vi alltså lösa systemet vars matrisform är $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 | \mathbf{x})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & -1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5x_1 + 13x_2 - 7x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att

$$\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 13x_2 - 7x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\mathbf{x}_e = C\mathbf{x}$$

där

$$C = T_{be} = T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Speciellt gäller

$$(\mathbf{e}_1)_b = C\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; (\mathbf{e}_2)_b = C\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \; (\mathbf{e}_3)_b = C\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\underline{b}$ är en ON-bas har vi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_b \bullet \mathbf{y}_b = (C\mathbf{x}) \bullet (C\mathbf{y})$$

Av detta följer att Gram-matrisen G_e, för standardbasen, ges av

$$G_e = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \end{pmatrix} = C^t C = \begin{pmatrix} 30 & -77 & 42 \\ -77 & 198 & -108 \\ 42 & -108 & 59 \end{pmatrix}$$

Vektorn $\mathbf{x}$ är ortogonal mot $\mathbf{e}_2$ om och endast om

$$0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle = \mathbf{x}_b \bullet (\mathbf{e}_2)_b = 13\xi_1 - 5\xi_2 - 2\xi_3$$

En vektor som uppfyller detta är

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_1$$

Delrummet $\mathbf{e}_2^\perp$ är tvådimensionellt så vi måste finna ytterligare en nollskild vektor $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ som är ortogonal mot både $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{u}_1$. För denna vektor gäller

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle = (\mathbf{u}_1)_b \bullet \mathbf{x}_b = \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \\ 0 &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle = (\mathbf{e}_2)_b \bullet \mathbf{x}_b = 13\xi_1 - 5\xi_2 - 2\xi_3 \end{aligned}$$

Eliminerar vi ξ_3 ur den andra ekvationen så får vi systemet

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \\ 0 &= \xi_1 - \xi_2 \end{aligned}$$

En vektor som uppfyller detta är

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_2$$

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ är en ortogonalbas i $\mathbf{e}_2^\perp$. Omräknat till standardbasen har vi

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

3. I rummet $\mathcal{P}_1$, av alla polynom $\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t,\ t \in \mathbb{R}$, har vi standardbasen $\underline{e} = (1, t)$. Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_e^t G \mathbf{y}_e$, där

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

definierar en inre produkt på $\mathcal{P}_1$. Du behöver bara visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ då $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ (vilket görs med kvadratkomplettering. Symmetrin, additiviteten och homogeniteten behöver inte visas). Bestäm en ON-bas i $\mathcal{P}_1$ och med hjälp av den en matris C sådan att $C^t C = G$. Bestäm det ortogonala komplementet till delrummet

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1 : \int_0^1 x(t)\, dt = 0\}$$

Lösning. Inre produkten av två vektorer $\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t$ och $\mathbf{y} = y(t) = y_1 + y_2 t$ ges alltså av

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5y_1 - 7y_2 \\ -7y_1 + 10y_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Speciellt har vi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5x_1 - 7x_2 \\ -7x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} = 5x_1^2 - 14x_1x_2 + 10x_2^2$$

En kvadratkomplettering ger

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 5\left(x_1 - \tfrac{7}{2}x_2\right)^2 + (10 - \tfrac{49}{5})x_2^2 = 5\left(x_1 - \tfrac{7}{2}\,x_2\right)^2 + \tfrac{1}{5}\,x_2^2$$

Av detta följer att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ för alla $\mathbf{x}$ och $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ om och endast om $0 = x_1 - \frac{7}{2}\,x_2 = x_2$, vilket är fallet om och endast om $\mathbf{x} = \vec{0}$.

Vi ska nu finna en ON-bas: Det första steget är då att ta fram en ortogonalbas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Här kan man ta $\mathbf{b}_1$ som vilken nollskild vektor som helst, men vi väljer förstås en vektor med heltalskoordinater. Av $(*)$ leds vi att välja $\mathbf{b}_1 = \mathbf{y}$, där $5y_1 - 7y_2$ och $-7y_1 + 10y_2$ är så små som möjligt. Vi tar därför $\mathbf{b}_1 = 1 + t$. Enligt $(*)$ gäller då

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5 - 7 \\ -7 + 10 \end{pmatrix} = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2x_1 + 3x_2$$

Speciellt har vi

$$\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = -2 + 3 = 1$$

Nu ska vi ta fram $\mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$, som är ortogonal mot $\mathbf{b}_1$, alltså

$$0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle = -2x_1 + 3x_2$$

Enklaste valet är här $\mathbf{b}_2 = 3 + 2t$. Enligt $(*)$ gäller då

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5(3) - 7(2) \\ -7(3) + 10(2) \end{pmatrix} = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

Speciellt har vi

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle = 3 - 2 = 1$$

Turligt nog är alltså både $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ enhetsvektorer, så $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ är en ON-bas i $\mathcal{P}_1$. Varje $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1$ kan då skrivas

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle\, \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle\, \mathbf{b}_2 = (-2x_1 + 3x_2)\, \mathbf{b}_1 + (x_1 - x_2)\, \mathbf{b}_2.$$

och för den inre produkten har vi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (-2x_1 + 3x_2)(-2y_1 + 3y_2) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

Vektorn $\mathbf{x} = x_1 + x_2 t$ ligger i M om och endast om

$$0 = \int_0^1 (x_1 + x_2 t)\, dt = x_1 + \tfrac{1}{2}\, x_2, \quad \text{alltså} \quad x_2 = -2x_1$$

En bas i M är $(\mathbf{c})$, där $\mathbf{c} = 1 - 2t$. Vektorn $\mathbf{x}$ ligger i $M^\perp$ omm

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle &= (-2x_1 + 3x_2)(-2(1) + 3(-2)) + (x_1 - x_2)(1 - (-2)) \\ &= (-8)(-2x_1 + 3x_2) + 3(x_1 - x_2) = 19x_1 - 27x_2 \end{aligned}$$

En bas i $M^\perp$ är, till exempel, $(27 + 19\,t)$. $\square$

Uppgifter till lektion nr 5:

1. Visa att den linjära avbildningen $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{R}^3$, med standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar. Bestäm en bas i varje egenrum, en inverterbar matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal, $P_1 + P_2 + P_3 = I$ (enhetsmatrisen), $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$ och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O \qquad \text{(nollmatrisen).}$$

Lösning. Egenvärdena till F ges av

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & 3-\lambda & -6 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -6 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -6 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & -6 \\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ -1-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)
\end{aligned}$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

- Egenrummet till $\lambda_1 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x_1 = x_3,\ x_2 = 2x_3$. En bas i egenrummet $N(F - I)$ är $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 1)^t$.
- Egenrummet till $\lambda_2 = 2$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x_1 = x_2 = 2x_3$. En bas i egenrummet $N(F - 2I)$ är $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 1)^t$.

– Egenrummet till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = x_2 = x_3$. En bas i egenrummet $N(F+I)$ är $\mathbf{b}_3 = (1,1,1)^t$.

De sökta matriserna ges av

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (-1,\ 1,\ 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ 0,\ -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0,\ -1,\ 2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Att matriserna har de angivna egenskaperna följer av den allmänna teorin. □

2. Visa att den linjära avbildningen $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{E}^3$, med standardmatrisen

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar. Bestäm en ON-bas i varje egenrum, en ortogonal matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal,

$$P_1 + P_2 + P_3 = I,\ P_1^2 = P_1 = P_1^t,\ P_2^2 = P_2 = P_2^t,\ P_3^2 = P_3 = P_3^t$$

och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O.$$

Lösning. Egenvärdena till F ges av

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 5-6\lambda & 7 & 2 \\ 7 & 5-6\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -4-6\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-6\lambda & 7 & 2 \\ 12-6\lambda & 5-6\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -4-6\lambda \end{vmatrix} \\
&= (12-6\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -2-6\lambda & -4 \\ 0 & -2 & -4-6\lambda \end{vmatrix} = (12-6\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 5-6\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -4-6\lambda \end{vmatrix} \\
&= (12-6\lambda) \begin{vmatrix} -2-6\lambda & -4 \\ 6\lambda & -6\lambda \end{vmatrix} = (12-6\lambda)(-6\lambda) \begin{vmatrix} -2-6\lambda & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (12-6\lambda)(-6\lambda)(-6-6\lambda) = 6^3(2-\lambda)(0-\lambda)(-1-\lambda)
\end{aligned}
$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$.

- Egenrummet $N(F)$ till $\lambda_1 = 0$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

  med lösningen $x_1 = -x_2 = x_3$. En bas i egenrummet är $(\mathbf{b}_1)$, där $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 1)^t$.
- Egenrummet $N(F - 2I)$ till $\lambda_2 = 2$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

  med lösningen $x_1 = x_2,\ x_3 = 0$. En bas i egenrummet är $(\mathbf{b}_2)$, där $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)^t$.
- Egenrummet $N(F + I)$ till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

  med lösningen $x_3 = 2x_2 = -2x_1$. En bas i $N(F + I)$ är $(\mathbf{b}_3)$, där $\mathbf{b}_3 = (1, -1, -2)^t$.

De sökta matriserna ges av

$$
B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad R = B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^t/3 \\ \mathbf{b}_2^t/2 \\ \mathbf{b}_3/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}
$$

D är diagonalmatrisen med $0,\ 2,\ -1$ i diagonalen,

$$
P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ -1,\ 0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
P_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (1,\ -1,\ -2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

Att matriserna har de angivna egenskaperna följer av den allmänna teorin. $\square$

3. I $\mathbb{R}^2$ införs skalärprodukten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$, där

$$G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 37 & -16 \\ -16 & 13 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med avseende på denna skalärprodukt.

(b) Bestäm matriser A och C sådan att

$$G = C^t C = A^2$$

Lösning. (a) Vi har alltså

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{5}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 37 & -16 \\ -16 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 37y_1 - 16y_2 \\ -16y_1 + 13y_2 \end{pmatrix}$$

Vektorn $\mathbf{x}$ är därför vinkelrät mot $\mathbf{u}$ om och endast om

$$0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{5}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 37 - 16 \\ -16 + 13 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}(7x_1 - x_2)$$

En bas i $\mathbf{u}^\perp$ är därför $((1,7)^t)$.

(b) För att finna A behöver vi diagonalisera G. Egenvärdena till G ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 37 - 5\lambda & -16 \\ -16 & 13 - 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - 5\lambda & -16 \\ 10 - 10\lambda & 13 - 5\lambda \end{vmatrix} = (5 - 5\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 13 - 5\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 5(1 - \lambda)\begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 45 - 5\lambda \end{vmatrix} = 25(1 - \lambda)(9 - \lambda)$$

Alltså har vi egenvärdena $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9$.

* Egenvektorerna till $\lambda_1 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 32 & -16 & 0 \\ -16 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vars lösningar ges av $x_2 = 2x_1$. En egenvektor är $\mathbf{b}_1 = (1,2)^t$.

* Egenvektorerna till $\lambda_2 = 9$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -8 & -16 & 0 \\ -16 & -32 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vars lösningar ges av $x_1 = -2x_2$. En egenvektor är $\mathbf{b}_2 = (-2,1)^t$.

Sätter vi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

så gäller $G = BDB^{-1}$. Om vi nu sätter

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = B\sqrt{D}B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

och $C = C^t = A$ så har vi

$$C^tC = A^2 = B\sqrt{D}B^{-1}B\sqrt{D}B^{-1} = B\sqrt{D}\sqrt{D}B^{-1} = BDB^{-1} = G.$$

$\square$

Uppgifter till lektion nr 6:

1. Låt $\mathcal{P}_3$ vara rummet av alla polynom av grad högst tre och låt $\mathcal{S}_3$ beteckna rummet av alla symmetriska 3×3-matriser. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{S}_3$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x(0) & x'(0) & x''(0) \\ x'(0) & x'(1) & x''(1) \\ x''(0) & x''(1) & x''(-1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 \in \mathcal{P}_3$$

Välj en bas $\underline{b}$ i $\mathcal{P}_3$ och en bas $\underline{c}$ i $\mathcal{S}_3$ och ange F:s matris ($[F]_{cb}$) med avseende på de baser du valde. Ange även baser i F:s noll- och värderum.

Lösning. Vi väljer $\underline{b}$ och $\underline{c}$ som standardbaserna i $\mathcal{P}_3$ respektive $\mathcal{S}_3$. För

$\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3$ har vi $x'(t) = x_2 + 2x_3 t + 3x_4 t^2$ och $x''(t) = 2x_3 + 6x_4 t$

Detta ger

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 2x_3 \\ x_2 & x_2 + 2x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 6x_4 \\ 2x_3 & 2x_3 + 6x_4 & 2x_3 - 6x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1\mathbf{c}_1 + (x_2 + 2x_3 + 3x_4)\mathbf{c}_2 + (2x_3 - 6x_4)\mathbf{c}_3 + x_2\mathbf{c}_4 + 2x_3\mathbf{c}_5 + (2x_3 + 6x_4)\mathbf{c}_6 \end{aligned}$$

och $F(\mathbf{x})_c = [F]_{cb}\mathbf{x}_b$, där

$$A = [F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Om $F(\mathbf{x}) = \vec{0}$ så gäller $0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Det betyder att $N(F) = \{\vec{0}\}$, det enda rum som saknar bas. Vi ser även att

$$F(\mathbf{x}) = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En bas i $V(F)$ är därför

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

$\square$

2. Den linjära avbildningen $G : \mathcal{S}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ definieras genom

$$G(\mathbf{x}) = (x_4 + x_5 + x_6) + (x_2 + x_3 + x_5)t + (x_2 + x_4 + x_5)t^2 + (x_3 + x_5 + x_6)t^3,$$

för

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3.$$

Bestäm baser $\underline{b} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6)$ i $\mathcal{S}_3$ och $\underline{c} = (c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$ i $\mathcal{P}_3$ sådana att $[G]_{cb}$ har formen

$$[G]_{cb} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I är en enhetsmatris och de tre O:na betecknar nollmatriser av passande ordningar.

Lösning.

$$[G]_{cb} = (G(\mathbf{b}_1)_c, G(\mathbf{b}_2)_c, G(\mathbf{b}_3)_c, G(\mathbf{b}_4)_c, G(\mathbf{b}_5)_c, G(\mathbf{b}_6)_c)$$

och kolonnerna i $[G]_{cb}$ endera är standardbasvektorer eller nollvektorer så har vi endera $G(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ eller $G(\mathbf{b}_i) = \vec{0}$. Vektorerna $\mathbf{b}_i$ sådana att $G(\mathbf{b}_i) = \vec{0}$ bildar en bas i $N(G)$ och för de återstående vektorerna $\mathbf{b}_i$ gäller att vektorerna $\mathbf{c}_i = G(\mathbf{b}_i)$ bildar en bas i $V(G)$. För att finna $\underline{b}$ och $\underline{c}$ börjar vi med att ta fram matrisen $A = [G]_{es}$, för G, med avseende på standardbaserna $\underline{s}$ i $\mathcal{S}_3$ och $\underline{e}$ i $\mathcal{P}_3$. Av $(*)$ framgår att

$$G(\mathbf{x})_e = \begin{pmatrix} x_4 + x_5 + x_6 \\ x_2 + x_3 + x_5 \\ x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 + x_5 + x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_s$$

För kolonnerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6$ i A gäller att $\mathbf{a}_1 = G(\mathbf{s}_1)_e, \ldots, \mathbf{a}_6 = G(\mathbf{s}_6)_e$. Genom ett antal radoperationer får vi

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ och att vektorerna $\mathbf{x} \in N(G)$ ges av ekvationssystemet $x_2 - x_6 = 0$, $x_3 + x_5 + x_6 = 0$, $x_4 + x_5 + x_6 = 0$. Systemet har lösningen $x_2 = x_6$, $x_3 = -x_5 - x_6$, $x_4 = -x_5 - x_6$, där x_1, x_5, x_6 kan väljas fritt. Det betyder att $N(G)$ består av vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 & -x_5 - x_6 & x_5 \\ -x_5 - x_6 & x_6 & x_6 \\ x_5 & x_6 & -x_5 - x_6 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= x_1\mathbf{b}_4 + x_5\mathbf{b}_5 + x_6\mathbf{b}_6 \in \mathcal{S}_3. \end{aligned}$$

Väljer vi nu

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{c}_1 = G(\mathbf{b}_1) = t + t^2 \quad \mathbf{c}_2 = G(\mathbf{b}_2) = t + t^3 \quad \mathbf{c}_3 = G(\mathbf{b}_3) = 1 + t^2$$

samt $\mathbf{c}_4 = 1$ (en vektor som inte ligger i $V(G)$) så är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{b}_5\ \mathbf{b}_6)$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3\ \mathbf{c}_4)$ sådana baser som efterfrågades. □

3. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} a-4 & 2a-6 & 2a-6 \\ 1-3a & 2-5a & 2-6a \\ 2a+2 & 3a+3 & 4a+3 \end{pmatrix}$$

Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$, för vilka F är diagonaliserbar och bestäm i förekommande fall en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. Egenvärdena till F ges av

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a-4-\lambda & 2a-6 & 2a-6 \\ 1-3a & 2-5a-\lambda & 2-6a \\ 2a+2 & 3a+3 & 4a+3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1-3a & 2-5a-\lambda & 2-6a \\ 2a+2 & 3a+3 & 4a+3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-3a & 2-5a-\lambda & 2-6a \\ 2a+2 & 3a+3 & 4a+3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-3a & 1-2a-\lambda & 1-3a \\ 2a+2 & a+1 & 2a+1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-2a-\lambda & 1-3a \\ a+1 & 2a+1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-2a-\lambda & \lambda-a \\ a+1 & a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)(a-\lambda) \begin{vmatrix} 1-2a-\lambda & -1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(a-\lambda)(2-a-\lambda)
\end{aligned}$$

Alltså har vi $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = 2-a$. Om $a = -1$ har vi $\lambda_1 = \lambda_2$. Om $a = 3$ har vi $\lambda_1 = \lambda_3$. Om $a = 1$ har vi $\lambda_2 = \lambda_3$. Det betyder att om $a \notin \{-1, 3, 1\}$ så är egenvärdena distinkta, vilket medför att F är diagonaliserbar. Vi bestämmer en bas av egenvektorer i detta fall:

– Egenvektorerna till $\lambda_1 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 2a-6 & 2a-6 & 0 \\ 1-3a & 3-5a & 2-6a & 0 \\ 2a+2 & 3a+3 & 4a+4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 0$, där x_3 är godtyckligt. Vi väljer $\mathbf{b}_1 = (2, 0, -1)^t$.

– Egenvektorerna till $\lambda_2 = a$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2a-6 & 2a-6 & 0 \\ 1-3a & 2-6a & 2-6a & 0 \\ 2a+2 & 3a+3 & 3a+3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = -x_3$, där x_3 är godtyckligt. Vi väljer $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)^t$.

– Egenvektorerna till $\lambda_3 = 2 - a$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a-6 & 2a-6 & 2a-6 & 0 \\ 1-3a & -4a & 2-6a & 0 \\ 2a+2 & 3a+3 & 5a+1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 0 & 2-2a & 0 \\ 0 & a+1 & 3a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $(a+1)x_1 = (2a-2)x_3$, $(a+1)x_2 = (1-3a)x_3$, där x_3 är godtyckligt. Vi väljer $x_3 = a+1$ och får $\mathbf{b}_3 = (2a-2, 1-3a, a+1)^t$.

Vi undersöker nu de återstående fallen då $a \in \{-1, 3, 1\}$:

– Då $a = -1$ ges egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -8 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Vi kan finna två linjärt oberoende egenvektorer, exempelvis $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 0)^t, \mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)^t$. För $\lambda_3 = 3$ ges egenvektorerna av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -8 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 + x_2 = 0 = x_3$. Vi väljer $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 0)^t$. $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ är en bas av egenvektorer så F är diagonaliserbar även då $a = -1$.

– Då $a = 3$ ges egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$ av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -12 & -16 & 0 \\ 8 & 12 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$. Vi kan finna två linjärt oberoende egenvektorer, exempelvis $\mathbf{b}_1 = (3, -2, 0)^t, \mathbf{b}_3 = (2, 0, -1)^t$. För $\lambda_2 = 3$ ges egenvektorerna av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -16 & -16 & 0 \\ 8 & 12 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = 0 = x_2 + x_3$. Vi väljer $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)^t$. $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ är en bas av egenvektorer så F är diagonaliserbar även då $a = 3$.

– Då $a = 1$ ges egenvektorerna till $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = 0 = x_2 + x_3$. Vi kan här inte finna två linjärt oberoende egenvektorer så i detta fall är F inte diagonaliserbar.

$\square$

Uppgifter till lektion nr 7:

1. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ har standardmatrisen

$$[F] = \begin{pmatrix} 2a-1 & a+3 & -2a \\ -5 & 1 & 4 \\ a-1 & -a-1 & a+4 \end{pmatrix}$$

För vilka värden på konstanten a har nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ någon gemensam vektor som inte är nollvektorn? Ange en sådan vektor i alla förekommande fall.

Lösning. Nollrummet innehåller nollskilda vektorer om och endast om

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2a-1 & a+3 & -2a \\ -5 & 1 & 4 \\ a-1 & -a-1 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+3 & -2a \\ 0 & 1 & 4 \\ a+2 & -a-1 & a+4 \end{vmatrix} \\ &= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & a+3 & -2a \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -a-1 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 0 & 2a+3 & -3a-4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -a-1 & a+4 \end{vmatrix} \\ &= (a+2)(8a+16+3a+4) = (a+2)(11a+20) \end{aligned}$$

De enda möjliga a-värdena är alltså $a = -2$ och $a = -\frac{20}{11}$:

- Då $a = -2$ har vi

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Av den högra matrisen framgår att nollrummet till A ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

  med lösningen $x_1 = x_2 = x_3$. En vektor i $N(F)$ är alltså $\mathbf{v} = 1 + t + t^2$. Denna vektor ligger i värderummet om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_e$ är lösbart. Skrivet på matrisform blir systemet

$$(A|\mathbf{v}_e) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Av den högra matrisen framgår att lösningarna ges av $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 1$. En lösning är, till exempel, $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^t$. Då $a = -2$ gäller alltså att $N(F) \cap V(F) = N(F) = [1 + t + t^2]$.

- Då $a = -\frac{20}{11}$ har vi

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{51}{11} & \frac{13}{11} & \frac{40}{11} \\ -5 & 1 & 4 \\ -\frac{31}{11} & \frac{9}{11} & \frac{24}{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att nollrummet till A ges av ekvationssystemet $0 = 7x_1 - 6x_3 = 7x_2 - 2x_3$, med lösningen $7x_1 = 6x_3$, $7x_2 = 2x_3$. Sätter vi $x_3 = 7$ får vi $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ så en vektor i $N(F)$ är $\mathbf{u} = 6 + 2t + 7t^2$. Denna vektor ligger även i värderummet om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_e$ är lösbart. Skrivet på matrisform, efter att ha multiplicerat två av ekvationerna med 11, blir systemet

$$(A|\mathbf{u}_e) = \left(\begin{array}{rrr|r} -51 & 13 & 40 & 66 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ -31 & 9 & 24 & 77 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Den sista raden i den högra matrisen svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 1$ så systemet saknar lösningar. Alltså ligger $\mathbf{u}$ inte i värderummet så $N(F) \cap V(F) = \{\vec{0}\}$.

□

2. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t) - 6y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) - 6y_3(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) - 4y_3(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$.

Lösning. På matrisform kan systemet skrivas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}(t)$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Vi känner igen denna matris från redovisningsuppgift 1 till lektion 5. Där såg vi att A är diagonaliserbar, $A = BDB^{-1}$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Genom att sätta

$$\mathbf{z}(t) = B^{-1}\mathbf{y}(t),\ \mathbf{z}_0 = B^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

får vi systemet $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t),\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$, alltså

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

med lösningen

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^{2t} \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

Detta ger i sin tur

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{y}(t) = B\mathbf{z}(t) = Be^{Dt}\mathbf{z}(0) = B \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^{2t} \\ 4e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - 4e^{2t} + 4e^{-t} \\ 2e^t - 4e^{2t} + 4e^{-t} \\ e^t - 2e^{2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

Som kontroll sätter vi in $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+4 \\ 2-4+4 \\ 1-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

3. Bestäm maximum och minimum av den kvadratiska formen

$$5x_1^2 + 14x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2$$

då

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Lösning. Den kvadratiska formen kan skrivas $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Vi känner igen denna matris från redovisningsuppgift 2 till lektion 5, fast matrisen vi har här är sex gånger så stor. Alltså har matrisen här sex gånger så stora egenvärden, men samma egenvektorer. I lektion 5 var egenvärdena 2, 0, -1 så A har egenvärdena $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -6$. I principalkoordinaterna, z_1, z_2, z_3, kan den kvadratiska formen därför skrivas

$$12\,z_1^2 - 6\,z_3^2$$

och vi söker maximum/minimum av denna då

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$$

Vi ser direkt att maximum är 12, vilket antas då $z_1 = \pm 1$, $z_2 = z_3 = 0$, medan minimum är -6, vilket antas då $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = \pm 1$. □

Uppgifter till lektion nr 8:

1. Bestäm, för alla värden på konstanten a, typen av ytan

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2az^2 = 2(3 + 2a - a^2)$$

samt (minsta) avståndet från ytan till origo. Avgör även för vilka a ytan är en rotationsyta och bestäm i sådana fall rotationsaxelns riktning.

Lösning. Den kvadratiska formen i vänsterledet kan skrivas som $\mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = [(3-\lambda)^2 - 1](2a - \lambda)$$
$$= (3 - \lambda + 1)(3 - \lambda - 1)(2a - \lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(2a - \lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2a$. I principalkoordinaterna har alltså ytan, efter halvering av båda leden, ekvationen

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + a\tilde{z}^2 = 3 + 2a - a^2 = (1 + a)(3 - a)$$

Vi har teckenbyte i någon term då $a = -1$, $a = 0$ eller $a = 3$. Desutom gäller $\lambda_2 = \lambda_3$ då $a = 1$ och $\lambda_1 = \lambda_3$ då $a = 2$. De olika fallen är därför $a < -1$, $a = -1$, $-1 < a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 3$ (där vi har en rotationsyta för $a = 1$ och $a = 2$), $a = 3$ och $3 < a$:

$a < -1$: Ekvationen är här
$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + a\tilde{z}^2 = (1 + a)(3 - a)$$
Högerledet är negativt, så ytan är en tvåmantlad hyperboloid. Minsta avståndet till origo är lika med $\sqrt{a^{-1}(1 + a)(3 - a)}$ och fås då
$$\tilde{x} = \tilde{y} = 0 \qquad , \tilde{z} = \pm\sqrt{a^{-1}(1 + a)(3 - a)}.$$

$a = -1$: Ekvationen är här
$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0$$
så ytan är en kon. Eftersom origo ligger på konen är minsta avståndet noll.

$-1 < a < 0$: Ekvationen är här
$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + a\tilde{z}^2 = (1 + a)(3 - a)$$
Högerledet är nu positivt så ytan är en enmantlad hyperboloid. Minsta avståndet till origo är lika med $\sqrt{(1 + a)(3 - a)/2}$ och fås då
$$\tilde{x} = \pm\sqrt{(1 + a)(3 - a)/2}, \qquad \tilde{y} = \tilde{z} = 0.$$

$a = 0$: Ekvationen är här

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 3$$

så ytan är en elliptisk cylinder. Minsta avståndet till origo är lika med $\sqrt{3/2}$ och fås då $\tilde{x} = \pm\sqrt{3/2}$, $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$.

$0 < a < 3$: Ekvationen är här

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + a\tilde{z}^2 = (1+a)(3-a)$$

Högerledet och a är positiva så ytan är en ellipsoid.

Då $0 < a \leq 2$ är minsta avståndet till origo lika med $\sqrt{(1+a)(3-a)/2}$ och fås då $\tilde{x} = \pm\sqrt{(1+a)(3-a)/2}$, $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$.

Då $2 < a < 3$ är minsta avståndet till origo lika med $\sqrt{(1+a)(3-a)/a}$ och fås då $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$, $\tilde{z} = \pm\sqrt{(1+a)(3-a)/a}$.

Då $a = 1$ är ekvationen

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 4$$

så ytan är en rotationsellipsoid med $\tilde{x}$-axeln som rotationsaxel. Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_1 = 4$ ges av systemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x = -y$, $z = 0$. Rotationsaxeln är alltså parallell med vektorn $(1, -1, 0)^t$. Minsta avståndet till origo är $\sqrt{2}$ och fås då $\tilde{x} = \pm\sqrt{2}$, $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$.

Då $a = 2$ är ekvationen

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2\tilde{z}^2 = 4$$

så ytan är en rotationsellipsoid med $\tilde{y}$-axeln som rotationsaxel. Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_2 = 2$ ges av systemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x = y$, $z = 0$. Rotationsaxeln är alltså parallell med vektorn $(1, 1, 0)^t$. Minsta avståndet till origo är $\sqrt{2}$ och fås för alla punkter på cirkeln $\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 2$, $\tilde{y} = 0$.

$a = 3$: Ekvationen är här

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 = 0$$

Enda punkten som uppfyller ekvationen är origo.

$3 < a$: Ekvationen är här

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + a\tilde{z}^2 = (1+a)(3-a)$$

Den saknar lösningar, eftersom högerledet är negativt.

□

2. För vilka värden på konstanterna b och c är den kvadratiska formen $h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix},$$

positivt definit?

Lösning. Hörndeterminanterna i A är

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 \quad \text{samt}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-1 & 1 \\ 1 & 1 & c-1 \end{vmatrix} = (b-1)(c-1) - 1 = c(b-1) - b$$

Alla tre är positiva om och endast om

$$b > 1 \quad \text{och} \quad c > \frac{b}{b-1}$$

□

3. Låt $M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{E}^3 : x + y = 0 = y + 2z\}$. $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är den ortogonala projektionen på $M^\perp$ och $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i $M^\perp$. Bestäm standardmatriserna för F och G.

Lösning. Vektorerna i M uppfyller alltså $x = -y = 2z$, vilket innebär att $M = [(2, -2, 1)^t]$. $M^\perp$ består därför av av alla vektorer som är vinkelräta mot $\mathbf{n} = (2, -2, 1)^t$. Låt nu $\mathbf{r} = (x, y, x)^t$ vara en godtycklig vektor i $\mathbb{E}^3$ och låt $\mathbf{q}$ vara projektionen av $\mathbf{r}$ längs $\mathbf{n}$. Vi har då

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \left(\frac{1}{\mathbf{n}^2} \mathbf{n}\mathbf{n}^t \right) \mathbf{r} = Q\mathbf{r},$$

där

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}^2} \mathbf{n}\mathbf{n}^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom $F(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{q} = (I - Q)\mathbf{r}$ och $G(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - 2\mathbf{q} = (I - 2Q)\mathbf{r}$ gäller att standardmatriserna P och S, för F respektive G, ges av

$$P = I - Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

och

$$S = I - 2Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

□