UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
ES, KandFy, Q, X
Linjär algebra II
2010–10–22

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med utförliga motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Låt $\mathcal{P}_3$ beteckna rummet av alla polynom av grad högst tre. Delrummet M till $\mathcal{P}_3$ spänns upp av polynomen $p_1(t) = 1+t$, $p_2(t) = t+t^3$, $p_3(t) = 3+t-2t^3$, $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$. Bestäm en bas i M bland dessa polynom. Visa att det finns ett $a \in \mathbb{R}$ sådant att $p(t) = 2+at+t^2+2t^3$ ligger i M och bestäm, i detta fall, koordinaterna för $p(t)$ med avseende på den bas i M du förut fann.

2. Ett delrum till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 - x_4 = 0 = x_2 - x_3\}$$

Bestäm en ON-bas i L och skriv vektorn $\mathbf{u} = (3, 2, 1, 0)^t$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in L$ och $\mathbf{u}_2 \in L^\perp$. Beräkna även avståndet från $\mathbf{u}$ till L.

3. Låt $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - z = 0 = x - 2y + z\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i $M^\perp$. Bestäm standardmatrisen för F.

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 5y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -3$.

5. Visa att ekvationen

$$4x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 8$$

beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo.

Var god vänd!

6. Låt $\mathcal{P}_2$ vara rummet av alla polynom av grad högst två. En linjär operator $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = t^2 x''(t) + (1-2t)x'(t) + 2x(t), \quad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 \in \mathcal{P}_2$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och visa att F ej är diagonaliserbar.

7. Låt $\mathbb{R}^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla 2×2-matriser. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^{(2,2)} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)t + (x_1 + x_2)t^2, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}.$$

Bestäm baser $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ i $\mathbb{R}^{(2,2)}$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ i $\mathcal{P}_2$ sådana att $[F]_{cb}$ är av formen

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I betecknar en enhetsmatris och O:na betecknar nollmatriser av passande typer.

8. Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$ och

$$G = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

definierar en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$. Bestäm även en matris C sådan att $C^t C = G$.

Ledning: Du ska alltså visa att $\langle -, - \rangle$ är symmetrisk, additiv, homogen och positiv.