UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra II
ES, KandFy, Q, X
Höstterminen 2010

Lösningar till tentamen i linjär algebra II, 2010–10–22

1. Låt $\mathcal{P}_3$ beteckna rummet av alla polynom av grad högst tre. Delrummet M till $\mathcal{P}_3$ spänns upp av polynomen $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = t + t^3$, $p_3(t) = 3 + t - 2t^3$, $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Bestäm en bas i M bland dessa polynom. Visa att det finns ett $a \in \mathbb{R}$ sådant att $p(t) = 2 + at + t^2 + 2t^3$ ligger i M och bestäm, i detta fall, koordinaterna för $p(t)$ med avseende på den bas i M du förut fann.

Lösning. Vi bildar en matris med koordinatvektorerna för $p_1, \ldots, p_4$, med avseende på standardbasen i $\mathcal{P}_3$, som kolonner och gör radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att (p_1, p_2, p_4) utgör en bas i M. Koordinaterna för p, i fallen då $p \in M$, ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att $p(t) \in M$ om och endast om $a = 3$, i vilket fall koordinaterna för p med avseende på basen (p_1, p_2, p_4) är $1, 1, 1$. $\square$

2. Ett delrum till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 - x_4 = 0 = x_2 - x_3\}$$

Bestäm en ON-bas i L och skriv vektorn $\mathbf{u} = (3, 2, 1, 0)^t$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in L$ och $\mathbf{u}_2 \in L^\perp$. Beräkna även avståndet från $\mathbf{u}$ till L.

Lösning. Vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ligger i L omm $x_1 = x_4$ och $x_2 = x_3$, alltså omm

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_4\mathbf{b}_1 + x_3\mathbf{b}_2$$

Vektorerna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ bildar en ortogonalbas i L. Genom att normera denna bas får vi ON-basen $(\mathbf{b}_1/\sqrt{2}, \mathbf{b}_2/\sqrt{2})$ i L.

Projektionen $\mathbf{u}_1$, av $\mathbf{u}$ på L, ges av

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

och vi har

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\4\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Slutligen gäller att

$$\text{Avst}(\mathbf{u}, L) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{9+1+1+9} = \sqrt{5}$$

□

3. Låt $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : x - z = 0 = x - 2y + z\}$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala speglingen i $M^\perp$. Bestäm standardmatrisen för F.

Lösning. M är skärningen mellan två plan genom origo. Alltså är M en rät linje genom origo. Ekvationssystemet $x - z = 0 = x - 2y + z$ har lösningarna $x = y = z$, där $z \in \mathbb{R}$ är godtyckligt. En vektor i M är $\mathbf{n} = (1,1,1)^t$. $M^\perp$ är planet genom origo med normalvektorn $\mathbf{n}$.

Låt $G : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ vara den ortogonala projektionen på M och låt S, Q beteckna standardmatriserna för F respektive G. Vi har sambandet $F = I - 2G$ (se kryssproblem 2 till lektion 3 2009). Av detta följer att $S = I - 2Q$. Q ges av

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

vilket ger

$$S = I - 2Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix} = S^t = S^{-1}.$$

□

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 5y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -3$.

Lösning. På matrisform kan systemet skrivas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 24 - (5-\lambda)(5+\lambda) = \\ &= -1 + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Alltså $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

För matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{med inversen} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

gäller då att $P^{-1}AP = D$, där D är diagonalmatrisen med egenvärdena $1, -1$ i diagonalen. Genom transformationen $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t)$ fås systemet $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t)$, d.v.s. $z_1'(t) = z_1(t)$, $z_2'(t) = -z_2(t)$ med lösningen $z_1(t) = c_1e^t$, $z_2(t) = c_2e^{-t}$. Här gäller att

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

vilket slutligen ger oss lösningen

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4e^t \\ -11e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12e^t - 11e^{-t} \\ 8e^t - 11e^{-t} \end{pmatrix}$$

Svar: $y_1(t) = 12e^t - 11e^{-t}$, $y_2(t) = 8e^t - 11e^{-t}$. □

5. Visa att ekvationen

$$4x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 8$$

beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo.

Lösning. Den kvadratiska formen i vänsterledet har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 & 2 \\ \lambda-8 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (8-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) =$$

$$= (8-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-8) = (8-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Alltså är egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$ och $\lambda_3 = -1$. Ytan är en rotationsyta ty λ_1 har algebraisk multiplicitet två. Ytans ekvation i principalkoordinaterna är $8\tilde{x}^2 + 8\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 8$. Det betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid med avståndet 1 till origo.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_{1,2} = 8$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ges alltså av ekvationen $2x+2y-z=0$. Då $\mathbf{v}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ måste den vara parallell med $(2,2,-1)$. Rotationsaxeln är därför den räta linjen med ekvationen $(x,y,z) = t(2,2,-1)$. $\square$

6. Låt $\mathcal{P}_2$ vara rummet av alla polynom av grad högst två. En linjär operator $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = t^2 x''(t) + (1-2t)x'(t) + 2x(t), \quad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 \in \mathcal{P}_2$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och visa att F ej är diagonaliserbar.

Lösning. Standardbasen i $\mathcal{P}_2$ är $\underline{e} = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = (1, t, t^2)$. Vi får

$$\begin{aligned} F(e_1) &= 0 + 0 + 2 = 2e_1 \\ F(e_2) &= 0 + (1-2t) + 2t = e_1 \\ F(e_3) &= t^2 \cdot 2 + (1-2t)(2t) + 2(t^2) = 2e_2 \end{aligned}$$

Standardmatrisen för F är därför

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till F ges därför av

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(0-\lambda)^2$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Egenvektorerna till $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenrummet till $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ har dimension 1, så den geometriska multipliciteten är mindre än den algebraiska multipliciteten. F är alltså inte diagonaliserbar. □

7. Låt $\mathbb{R}^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla 2×2-matriser. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^{(2,2)} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)t + (x_1 + x_2)t^2, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}.$$

Bestäm baser $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ i $\mathbb{R}^{(2,2)}$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ i $\mathcal{P}_2$ sådana att $[F]_{cb}$ är av formen

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I betecknar en enhetsmatris och O:na betecknar nollmatriser av passande typer.

Lösning. Standardbasen i $\mathcal{P}_2$ är $(1,\ t,\ t^2)$ och standardbasen i $\mathbb{R}^{(2,2)}$ är

$$(e_1\ e_2\ e_3\ e_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Av uttrycket för F framgår genast att standardmatrisen för F är

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den högra matrisen visar att $(F(e_1), F(e_3))$ är en bas i $V(F)$ samt att lösningarna till $F(\mathbf{x}) = 0$ (nollrummet) är de $\mathbf{x}$ som uppfyller $x_1 = -x_2 = s$, $x_3 = -x_4 = t$. Alltså

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s & -s \\ t & -t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En bas i $N(F)$ är därför

$$\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Låter vi nu $\mathbf{b}_1 = e_1$, $\mathbf{b}_2 = e_3$, $\mathbf{c}_1 = F(e_1) = 1 + t^2$, $\mathbf{c}_2 = F(e_3) = 1 + t$ och $\mathbf{c}_3 = 1$ (vilken vektor som helst som inte ligger i $V(F)$ går bra) så är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4)$, $\underline{c} = (\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3)$ baser i $\mathbb{R}^{(2,2)}$ respektive $\mathcal{P}_2$ och dessutom gäller $\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{b}_1)$, $\mathbf{c}_2 = F(\mathbf{b}_2)$, $F(\mathbf{b}_3) = F(\mathbf{b}_4) = \vec{0}$. Alltså har vi

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

8. Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$ och

$$G = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

definierar en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$. Bestäm även en matris C sådan att $C^t C = G$.

Ledning: Du ska alltså visa att $\langle -, - \rangle$ är symmetrisk, additiv, homogen och positiv.

Lösning. Eftersom G är symmetrisk får vi, med $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$, att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 13y_1 - 8y_2 \\ -8y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

och

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{y}^t G \mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^t G \mathbf{x}\right)^t = \mathbf{x}^t G^t \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(symmetrisk)} \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \mathbf{x}^t G(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^t G \mathbf{y} + \mathbf{x}^t G \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \quad \text{(additiv)} \\
\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= (\lambda \mathbf{x})^t G \mathbf{y} = \lambda \left(\mathbf{x}^t G \mathbf{y}\right) = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogen)} \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{x}^t G \mathbf{x} = 13x_1^2 - 16x_1x_2 + 5x_2^2 = \\
&= 13\left(x_1^2 - \tfrac{16}{13}x_1x_2\right) + 5x_2^2 = 13\left(x_1 - \tfrac{8}{13}x_2\right)^2 + \left(5 - \tfrac{64}{13}\right)x_2^2 = \\
&= 13\left(x_1 - \tfrac{8}{13}x_2\right)^2 + \tfrac{1}{13}x_2^2 > 0 \quad \text{då } \mathbf{x} \neq \vec{0}, \text{ (alltså positiv)}
\end{aligned}$$

Positiviteten följer alternativt av att G har positiva hörndeterminanter.

Det återstår att hitta en matris C sådan att $C^t C = G$. För det ändamålet behöver vi en ON-bas. Om $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ är en ON-bas så gäller, för två godtyckliga vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2)\,\mathbf{b}_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)\,\mathbf{b}_2 \\
\mathbf{y} &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (c_{11}y_1 + c_{12}y_2)\,\mathbf{b}_1 + (c_{21}y_1 + c_{22}y_2)\,\mathbf{b}_2
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^t G\mathbf{y} &= \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{b}_1\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{b}_1\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{b}_2\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{b}_2\rangle \\
&= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2)(c_{11}y_1 + c_{12}y_2) + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) \\
&= (C\mathbf{x})\cdot(C\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t C^t C\mathbf{y},
\end{aligned}$$

där

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Det följer att $G = C^tC$.

En ON-bas kan bestämmas genom att man tar en godtycklig bas, som sedan ortogonaliseras med hjälp av Gram-Schmidt. Den metoden ger dock sannolikt en ON-bas där basvektorerna har otympliga koordinater. I stället gör vi så här:

Första steget är att ta fram en ortogonalbas $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$: Av $(*)$ ser vi att det verkar vettigt att välja $\mathbf{a}_1 = \mathbf{y} \neq \vec{0}$ så att $\mathbf{y}$ har heltalskomponenter och $13y_1 - 8y_2,\ -8y_1 + 5y_2$ är två heltal nära 0. Vi väljer (efter att ha prövat oss fram) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{y} = (1,2)^t$, som ger $13y_1 - 8y_2 = -3,\ -8y_1 + 5y_2 = 2$. För varje $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ gäller då att

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{a}_1\rangle = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3x_1 + 2x_2$$

Speciellt gäller att

$$\langle \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle = (1,\ 2)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 4 = 1$$

Turligt nog är alltså $\mathbf{a}_1$ en enhetsvektor, så vi kan sätta $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,2)^t$. Vi ska nu välja $\vec{0} \neq \mathbf{a}_2 = \mathbf{x}$ så att

$$0 = \langle \mathbf{x},\mathbf{a}_1\rangle = -3x_1 + 2x_2.$$

Enklaste valet är $\mathbf{a}_2 = (2,3)^t$. Eftersom

$$G\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 - 24 \\ -16 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gäller, för en godtycklig $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, att

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{a}_2\rangle = (x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2$$

Speciellt gäller att

$$\langle \mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2\rangle = 2(2) - (3) = 4 - 3 = 1$$

Även $\mathbf{a}_2$ visar sig alltså vara en enhetsvektor, så vi sätter $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 = (2,3)^t$. För skalärprodukten av två godtyckliga vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ gäller då

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{x},\mathbf{b}_1\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{b}_1\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{b}_2\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{b}_2\rangle \\
&= (-3x_1 + 2x_2)(-3y_1 + 2y_2) + (2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2).
\end{aligned}$$

Vi kan av detta genast avläsa att

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = C^t$$

Vi kontrollerar:

$$C^t C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = G.$$

$\square$