Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Förkunskaper från linjär algebra och geometri 1.

I detta dokument tar vi i stort sett bara upp belysande exempel. För den allmänna teorin hänvisar vi till läroboken.

Linjära ekvationssystem och matriser.

- Matrisräkning fungerar ungefär som räkning med tal (se TH 1.4.1) med följande undantag: $AB = O$ (O betecknar alltid en nollmatris) kan gälla även i fall där $A \neq O$ och $B \neq O$. I allmänhet gäller att $AB \neq BA$. Exempelvis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- En kolonnmatris kallas ofta för en **kolonnvektor** (eller helt enkelt **vektor**). På samma sätt brukar en radmatris kallas för en **radvektor** (eller helt enkelt **vektor**).

  Ett linjärt ekvationssystem kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är koefficientmatrisen, $\mathbf{x}$ är kolonnvektorn med de obekanta och $\mathbf{b}$ är kolonnvektorn innehållande högerledet. Exempelvis kan ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ ax + y + (a+1)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

  skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & a+1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  Man kan även skriva ekvationssystemet som

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

  där $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ är kolonnerna i koefficientmatrisen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är de obekanta och $\mathbf{b}$ är högerledet. Skrivet på denna form blir, till exempel, ovanstående ekvationssystem

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a+1 \\ 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  Av denna form framgår det att ekvationssystemet är lösbart om och endast om $\mathbf{b}$ kan skrivas som en **linjärkombination** av kolonnerna i A.

- Vid lösandet av ett ekvationssystem skrivs det först på matrisformen $(A \mid \mathbf{b})$. Med elementära radoperationer transformeras därefter matrisen $(A \mid \mathbf{b})$ till en (helst reducerad) **trappmatris** $(C \mid \mathbf{h})$.

  Matriserna $(A \mid \mathbf{b})$ och $(C \mid \mathbf{h})$ är **radekvivalenta**, vilket skrivs som $(A \mid \mathbf{b}) \sim (C \mid \mathbf{h})$ och innebär att den ena matrisen kan transformeras till den andra matrisen genom ett antal radoperationer.

  En fundamental sats är här att $(A \mid \mathbf{b}) \sim (C \mid \mathbf{h})$ om och endast om ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $C\mathbf{x} = \mathbf{h}$ har samma lösningar. Speciellt gäller att $A \sim C$ om och endast om de homogena ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar.

  Av trappmatrisen $(C \mid \mathbf{h})$ kan du utläsa om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och, i så fall, vilka av de obekanta (variables som de kallas i läroboken) som är **fria** (allså som du kan ge godtyckliga värden) respektive **bundna** (alltså vars värden är helt bestämda av värdena på de fria obekanta). Lösningen kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$, där $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$ är värdena på de fria obekanta (som ju kan väljas godtyckligt). Här gäller att $\mathbf{x}_p$ (som är det $\mathbf{x}$ som erhålls då man väljer $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$) är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, medan $\mathbf{x}_h = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$ är den allmänna lösningen till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

- **Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ 2x & + & (a+2)y & + & (2a+2)z & = & 4 \end{array}\right. \tag{IH}$$

  för alla värden på den reella konstanten a.

  Lösning. (Vi hoppar över en del detaljer här.) På matrisform blir systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 & 4 \end{array}\right)$$

  Genom några radoperationer transformeras detta till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right). \tag{$*$}$$

  Om $a = 1$ så blir $(*)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Av det högra systemet framgår att då $a = 1$ har (det ursprungliga) ekvationssystemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$.

Om $a \neq 1$ kan den tredje raden i $(*)$ divideras med $1-a$, varvid vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right) \tag{\#}$$

I (#) ser vi att då $a \neq 2$ kan vi dividera den fjärde raden med $2-a$ varvid vi erhåller $(0\,0\,0 \mid 1)$. Denna rad svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 1$. Alltså saknar systemet lösningar då $a \notin \{1, 2\}$.

Om $a = 2$ blir den högra matrisen i (#)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \big(C \,|\, \mathbf{h}\big). \tag{$\heartsuit$}$$

$\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$ är en reducerad trappmatris. Första- och andra kolonnen är pivotkolonner, vilket betyder att x, y är bundna obekanta. Den tredje kolonnen är ej någon pivotkolonn, vilket innebär att z är en fri obekant. Den första raden i ($\heartsuit$) svarar mot ekvationen $x + z = 0$. Den andra raden i ($\heartsuit$) svarar mot ekvationen $y + z = 1$. Sätter vi $z = t$ får vi därför $x = -t$ och $y = 1 - t$, vilket ger oss lösningarna $(x, y, z) = (-t, 1-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Skriver vi denna lösning på kolonnform, vilket är bäst, så får vi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_p + t\,\mathbf{v}.$$

Här gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$ är en lösning till (IH), medan $\mathbf{r} = t\,\mathbf{v}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena system (systemet med samma koefficientmatris och högerledet $\vec{0}$).

Svar. Då $a \notin \{1, 2\}$ saknar systemet lösningar. Då $a = 1$ har systemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$. Då $a = 2$ har systemet ett oändligt antal lösningar, vilka ges av $(x, y, z) = (-t, 1-t, t) = (0, 1, 0) - t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. □

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 & 3 & 23 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -2 & -12 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -5 & 1 & 11 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 7 & 17 & 1 & -5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Bestäm den unika reducerade trappmatrisen C, som är radekvivalent med A. Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$. Använd lösningen för att bestämma sambanden mellan kolonnerna i A.

Lösning. Genom att göra en följd radoperationer, som vi hoppar över men som du bör göra, får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$, som har samma lösningar som $A\mathbf{x} = \vec{0}$, är alltså

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 4x_8 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_6 + 3x_8 = 0 \\ x_5 + 6x_6 + 2x_8 = 0 \\ x_7 + x_8 = 0 \end{cases}$$

där vi underlåtit att skriva upp två triviala ekvationer (av typ $0 = 0$). Här ser vi att de obekanta x_1, x_2, x_5 och x_7 (de bundna obekanta) kan uttryckas i de obekanta x_3, x_4, x_6 och x_8 (de fria obekanta) enligt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ x_5 &= -6x_6 - 2x_8 \\ x_7 &= -x_8 \end{aligned}$$

Lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ kan därför skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ 1\,x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 - 6x_6 - 2x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 + x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 - x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 + x_8 \end{pmatrix} =$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där x_3, x_4, x_6, x_8 kan väljas fritt (det är därför de kallas för fria).

Vi gör nu om detta, fast på ett lite annorlunda sätt. Kolonnerna i den reducerade trapp-

matrisen C är

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_8 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ kan skrivas som

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 + x_6\mathbf{a}_6 + x_7\mathbf{a}_7 + x_8\mathbf{a}_8 = \vec{0}. \tag{\#}$$

respektive

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 + x_5\mathbf{c}_5 + x_6\mathbf{c}_6 + x_7\mathbf{c}_7 + x_8\mathbf{c}_8 = \vec{0}. \tag{$*$}$$

Pivotkolonnerna i C är de som har en etta på en plats och nollor på övriga platser. Alltså $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_5$ och $\mathbf{c}_7$. De bundna obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_1, x_2, x_5 och x_7. Övriga kolonner, alltså $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$, är inga pivotkolonner. De fria obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_3, x_4, x_6 och x_8. För kolonnerna $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$ gäller att var och en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de pivotkolonner som ligger **till vänster** om kolonnen i fråga. Närmare bestämt gäller att

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_3 &= -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_4 &= 3\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_6 &= \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 6\mathbf{c}_5 \\ \mathbf{c}_8 &= 4\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_7 \end{aligned}$$

Kontrollera detta! Dessa likheter kan skrivas som

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (-2)\,\mathbf{c}_1 + 1\,\mathbf{c}_2 + (-1)\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 0\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 3\,\mathbf{c}_1 + 4\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + (-1)\,\mathbf{c}_4 + 0\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 1\,\mathbf{c}_1 + (-2)\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 6\,\mathbf{c}_5 + (-1)\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\ \vec{0} &= 4\,\mathbf{c}_1 + 3\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 2\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 1\,\mathbf{c}_7 + (-1)\,\mathbf{c}_8 \end{aligned}$$

Alltså är kolonnvektorerna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösningar till $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Som vi har sett är de då också lösningar till $A\mathbf{x} = \vec{0}$, vilket betyder att vi har likheterna

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= (-2)\,\mathbf{a}_1 + 1\,\mathbf{a}_2 + (-1)\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 0\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 3\,\mathbf{a}_1 + 4\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + (-1)\,\mathbf{a}_4 + 0\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 1\,\mathbf{a}_1 + (-2)\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 6\,\mathbf{a}_5 + (-1)\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 4\,\mathbf{a}_1 + 3\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 2\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 1\,\mathbf{a}_7 + (-1)\,\mathbf{a}_8
\end{aligned}$$

vilka kan omskrivas som

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_3 &= -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\
\mathbf{a}_4 &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 \\
\mathbf{a}_6 &= \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_5 \\
\mathbf{a}_8 &= 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_7
\end{aligned}$$

Det råder alltså exakt samma samband mellan kolonnerna i A som mellan kolonnerna i C, vilket du bör kontrollera! Av den anledningen sägs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ och $\mathbf{a}_7$ vara pivotkolonnerna i matrisen A. Övriga kolonner, alltså $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$ och $\mathbf{a}_8$, kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna. Eftersom pivotkolonnerna själva givetvis (hur då?) kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna kan alltså varje kolonn i matrisen A uttryckas som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A.

Med ledning av ovanstående kan vi definiera pivotkolonnerna i en godtycklig matris A som de kolonner i A som **inte** kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i A, som ligger till vänster om kolonnen i fråga.

Genom att resonera som vi gjort i detta exempel är det enkelt att bevisa den viktiga satsen att varje matris är radekvivalent med en **unik** reducerad trappmatris. □

- På samma sätt som ovan kan man även lösa **matrisekvationer**. En matrisekvation har utseendet $AX = B$, där A är en given $m \times n$-matris (koefficientmatrisen), B är en given $m \times p$-matris (högerledet) och X är en obekant $n \times p$-matris. Lösningen går till så att man först bildar totalmatrisen $(A \mid B)$. På denna görs sedan en följd radoperationer tills man får en (helst reducerad) trappmatris $(C \mid H)$. Matrisekvationen är lösbar om och endast om matrisen $(C \mid H)$ **inte** innehåller en rad med useendet $(0 \cdots 0 \mid h_1 \cdots h_p)$, där minst ett av talen $h_1, \ldots, h_p$ är skilt från noll. Alternativt kan detta uttryckas som att matrisekvationen är lösbar om och endast om **alla** pivotkolonnerna i $(C \mid H)$ ligger i C (ingen pivotkolonn i högerledet alltså).

  Låt $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ vara kolonnerna i den obekanta matrisen X ($X = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$ alltså) och låt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ vara kolonnerna i högerledsmatrisen B ($B = (\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_p)$ alltså). Matrisekvationen $AX = B$ är då lösbar om och endast alla ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ \ldots, \ A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$, är lösbara (kolonnerna i X utgörs av lösningsvektorerna till dessa system).

  Antag att $AX = B$ och $AX_s = B$. Vi har då att $A(X - X_s) = B - B = O$. Matrisen $X_h = X - X_s$ är alltså en lösning till den homogena matrisekvationen $AX = O$. Omvänt gäller att om X_h är en lösning till $AX = O$ och X_s är en lösning till $AX = B$ så är $X = X_s + X_h$ en lösning till $AX = B$. Det betyder att om X_s är en lösning till $AX = B$ och X_h är den allmänna lösningen till $AX = O$ så ges den allmänna lösningen (d.v.s samtliga lösningar) till $AX = B$ som $X = X_s + X_h$.

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 51 & 2 & 4 \\ -16 & 2 & 9 \\ 25 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & -3 \\ -11 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Lös matrisekvationerna $AX = B$ och $AX = O$. Analysera sambanden mellan lösningarna.

Lösning. Vi har

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 & 51 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 & -16 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 & 25 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 & 10 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 & -11 & -2 & 16 \end{array}\right)$$

Via ett antal radoperationer (överhoppas!) får vi

$$(A \mid B) \sim (C \mid H) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

För den homogena matrisekvationen får vi på samma sätt

$$(A \mid O) \sim (C \mid O) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I båda fallen är samtliga pivotkolonner ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{c}_5$) i vänsterledet så matrisekvationerna är lösbara. Observera för övrigt att en homogen matrisekvation $AX = O$ alltid är lösbar, ty $X = O$ är ju en lösning. Den obekanta matrisen har tre kolonner; $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Matrisekvationen $AX = B$ är ekvivalent med de tre ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3$, där $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är kolonnerna i B.

Låt oss titta närmare på ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$), vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \mathbf{h}_1$, där $\mathbf{h}_1$ är första kolonnen i H: De bundna obekanta är x_1, x_2, x_5, medan x_3 och x_4 är fria. Väljer vi $x_3 = x_4 = 0$ så fås (se $(C \mid H)$) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ och $x_5 = 6$. En lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ är därför $\mathbf{x}_s = (1, -2, 0, 0, 6)$. Motsvarande homogena system är $A\mathbf{x} = \vec{0}$, vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Sätter vi $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ så får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 = 2t_1 - 3t_2 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 = -t_1 - 4t_2 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$\mathbf{x}_h = \begin{pmatrix} 2t_1 - 3t_2 \\ -t_1 - 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2$$

$$= \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Av detta följer att den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_s + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Första kolonnen i den allmänna lösningen till matrisekvationen $AX = B$ har alltså detta utseende. Genom att göra motsvarande för andra- och tredje kolonnen i X kan vi (detaljerna lämnas åt dig som läser detta) dra slutsatsen att matrisekvationen $AX = B$ har den allmänna lösningen

$$X = X_s + X_h = X_s + (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)\, t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix},$$

där $t = (t_{ik})$ är en godtycklig 2×3-matris. För skojs skull kontrollerar vi att $X = X_s + X_h$ verkligen är en lösning till ekvationen $AX = B$. Vi har

$$\begin{aligned} AX &= AX_s + AX_h = B + A(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)t \\ &= B + (A\mathbf{v}_1\ A\mathbf{v}_2)t \\ &= B + (\vec{0}\,\vec{0})t = B. \end{aligned}$$

□

- Om A är en $m \times n$-matris, där $m < n$, så måste ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ha oändligt många lösningar. Anledningen är att antalet pivotkolonner är högst m så det måste finnas fria obekanta (minst $n - m$ stycken). Om A är en $m \times n$-matris och ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ **bara** har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$ så måste alltså $m \geq n$.

- Om A är en $m \times n$-matris och $A \sim C$ där C är en trappmatris med r nollskilda rader sägs A ha **rangen** r. Eftersom antalet nollskilda rader i C är lika med antalet pivotkolonner så följer att rangen är **högst** lika med det **minsta** av talen m och n. En $m \times n$-matris med rang lika med det minsta av talen m och n sägs ha **full** rang (större rang kan den inte ha). En

$m \times n$-matris som innehåller en nollrad måste ha rang mindre än m. En $m \times n$-matris som innehåller en nollkolonn måste ha rang mindre än n. En $n \times n$-matris (kvadratisk matris) har full rang om och endast om den är radekvivalent med I_n.

Enhetsmatriserna $I = I_m$ är ju reducerade trappmatriser från start så rangen av I_m är m. Av definitionen följer att rangen av en matris ej ändras vid en radoperation.

- Vad vi förut sagt om lösbarheten hos ekvationssystem och matrisekvationer kan nu uttryckas mer precist: Matrisekvationen $AX = B$ är lösbar om och endast om matriserna A (koefficientmatrisen) och $(A \mid B)$ (totalmatrisen) har samma rang. Om ekvationen är lösbar så har vi oändligt många lösningar om och endast om rangen är mindre än antalet kolonner i A, men entydig lösning om och endast om rangen är lika med antalet kolonner i A (varje kolonn i A är då en pivotkolonn).

- En **högerinvers** till $m \times n$-matrisen A är en $n \times m$-matris X sådan $AX = I_m$. Denna matrisekvation är, som vi sett, lösbar om och endast om matriserna A och $(A \mid I_m)$ har samma rang. Eftersom I_m och därmed $(A \mid I_m)$ har rangen m så betyder det att A har högerinvers om och endast om A har rang m. En följd av detta är att $m \leq n$. Högerinversen är unik om och endast om $m = n$.

  Exempel. Bestäm alla högerinverser till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

  Lösning. Vi ska alltså bestämma samtliga lösningar till matrisekvationen $AX = I_2$. Med några radoperationer får vi

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

  De båda första kolonnerna i A är pivotkolonner så x_3 är fri obekant. Genom att sätta $x_{31} = x_{32} = 0$ får vi högerinversen

$$X_s = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Om X är en godtycklig högerinvers och vi sätter $X_h = X - X_s$ så gäller

$$AX_h = AX - AX_s = I - I = O.$$

  X_h är alltså en lösning till den homogena matrisekvationen $AX = O$. Lösningarna till denna ges av

$$(A \mid O) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Genom att sätta $x_{31} = t_1$, $x_{32} = t_2$ får vi den allmänna lösningen X_h till den homogena ekvationen $AX = O$:

$$X_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 & 2t_2 \\ -2t_1 & -2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (t_1 \; t_2).$$

Den allmänna lösningen till $AX = I_2$, alltså samtliga högerinverser till A, ges därför av

$$X = X_s + X_h = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (t_1\ t_2) = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -5+2t_2 \\ -1-2t_1 & 3-2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

där t_1, t_2 är godtyckliga reella tal. □

- En **vänsterinvers** till $m \times n$-matrisen A är en $n \times m$-matris Y sådan $YA = I_n$, vilket är ekvivalent med att $A^t Y^t = I_n$ (Y^t är en högerinvers till A^t). Enligt ovan har därför A en vänsterinvers om och endast om A har rang n, vilket medför att $n \leq m$. Vänsterinversen är unik om och endast om $m = n$.

  Exempel. Bestäm alla vänsterinverser till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

  Lösning. Vänsterinverserna Y, till A, fås som transponaten av högerinverserna till A^t. Enligt föregående exempel gäller därför

  $$Y^t = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -5+2t_2 \\ -1-2t_1 & 3-2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

  Alltså har vi

  $$Y = \begin{pmatrix} 2+2t_1 & -1-2t_1 & t_1 \\ -5+2t_2 & 3-2t_2 & t_2 \end{pmatrix},$$

  där t_1, t_2 är godtyckliga reella tal. □

- Av de föregående punkterna följer direkt att en $m \times n$-matris A har både en vänsterinvers och en högerinvers om och endast om A är kvadratisk (d.v.s $m = n$) med full rang. I så fall finns det alltså unika kvadratiska matriser X och Y sådana att $AX = I_n$ och $YA = I_n$. Av detta följer emellertid att

  $$Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_n X = X,$$

  så vänster- och högerinversen måste vara lika. Vi säger att X är **inversen** till A. Inversen till A brukar betecknas A^{-1}. För A^{-1} gäller alltså att

  $$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I_n.$$

  Det effektiva sättet att bestämma A^{-1} är att lösa matrisekvationen $AX = I_n$. Ställ upp $(A \mid I_n)$ och gör radoperationer tills du får $(I_n \mid A^{-1})$.

Vektorer i planet och rummet:

Närmare bestämt vektorräkning, avstånd, skalärpodukt, vinklar och framför allt projektionen av en vektor på en annan vektor. Plan och räta linjer. Exemplen innehållande sfärer kan du hoppa över.

- En (geometrisk) vektor $\vec{u}$ eller $\mathbf{u}$ är en pilfrån en punkt A till en punkt B (i planet eller rummet). Vi skriver $\vec{u} = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Två vektorer $\vec{u} = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$ är **lika** om $ABDC$ är en parallellogram, så en vektor ändrar sig inte om man parallellförflyttar den.
- Summa, $\vec{u} + \vec{v}$, multipel, $\lambda\vec{u}$, nollvektor, $\vec{0}$, motsatt vektor $-\vec{u}$. Räknelagar för vektorer.
- Ortonormerade koordinatsystem i planet och rummet (Oxy respektive $Oxyz$). Avstånds-formeln. Koordinater för vektorer ($\vec{u} = (u_1, u_2)$ respektive $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$). Normen $\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ av en vektor. Enhetsvektorer.
- Skalärprodukt: Geometriskt; $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$. Uttryckt i ON-koordinater; $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. $\|u\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- Ortogonala projektionen $\vec{p}$ av vektorn $\vec{u}$ på vektorn $\vec{f}$ som ges av

  $$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{f}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{f}}{\vec{f} \cdot \vec{f}}\vec{f}$$

  och har egenskapen att $\vec{q} = \vec{u} - \vec{p}$ är vinkelrät mot $\vec{f}$.
- Ortogonala projektionen $\vec{p}$ av $\vec{u}$ på planet $ax + by + cz = 0$, med normalvektorn $\vec{n} = (a, b, c)$, som ges av

  $$\vec{p} = \vec{u} - \vec{q}, \quad \text{där} \quad \vec{q} = \text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}$$

  Vi har här $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$, där $\vec{p}$ ligger i planet och $\vec{q}$ är vinkelrät mot planet, d.v.s. $\vec{q}$ är parallell med $\vec{n}$. Om vektorerna anges som en kolonnmatriser så gäller $\vec{q} = Q\vec{u}$ och $\vec{p} = P\vec{u}$ där

  $$Q = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

- Kryssprodukten av vektorerna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ med formeln

  $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

  Arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.
- Trippelprodukten

  $$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

  har värdet $\pm V$, där V är volymen av parallellepipeden som uppspänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Tecknet på trippelprodukten visar om trippeln $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ utgör ett höger- eller vänstersystem.

- Ett plan har en ekvation $ax + by + cz + d = 0$ (på **normalform**). Vektorn $\vec{n} = (a, b, c)$ är en normalvektor till planet.

- För att hitta en ekvation (på normalform) för planet genom tre givna punkter $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ kan man gå tillväga på (åtminstone) tre sätt:

  (1) Ansätt planets ekvation $ax + by + cz + d = 0$. Alla tre punkterna skall uppfylla denna ekvation vilket ger oss ekvationssystemet

  $$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$$

  där a, b, c, d är de obekanta.

  (2) De båda vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ är parallella med planet, vilket medför att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (a, b, c)$ är en normal till planet. Planet har därför ekvationen

  $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

  (ty för en godtycklig punkt $P(x, y, z)$ i planet är vektorn $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vinkelrät mot (a, b, c)).

  (3) För en godtycklig punkt $P(x, y, z)$ i planet är vektorerna $\mathbf{w} = \overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ parallella med planet. Volymen av den parallellepiped som spänns upp av de tre vektorerna är därför 0, vilket ger oss ekvationen

  $$0 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

  som vi kallar för planets ekvation på determinantform.

- Avståndet D från en punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ till planet $ax + by + cz + d = 0$ är

  $$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

  Se THEOREM 3.5.2.

- Avståndet D mellan två parallella plan $ax + by + cz + d_1 = 0$ och $ax + by + cz + d_2 = 0$ ges av

  $$D = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

  Se exempel 9, sid 162.

- En rät linje genom punkten $P_0(x_0, y_0, z_0)$ parallell med vektorn $\mathbf{v} = (a, b, c)$ har ekvationen $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, $-\infty < t < \infty$. Sätter vi $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ (ortsvektorerna till punkterna) blir detta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$.

- Avståndet D mellan två linjer $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\,\mathbf{v}_2$, som ej är parallella, är lika med avståndet mellan de två parallella planen $ax + by + cz + d_1 = 0$ och $ax + by + cz + d_2 = 0$, där $(a, b, c) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, som innehåller punkterna $P_1(x_1, y_1, z_1)$ respektive $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Det innebär, enligt ovan, att

$$D = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

- Ibland anges en rät linje som skärningen mellan två plan $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ och $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Det kan ofta vara lämpligt att uttrycka två av variablerna i den tredje och på så sätt få fram en ekvation för linjen på formen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$. Anta, till exempel, att planen har ekvationerna $x + 2y - 2z = 15$ och $2x + y + 2z = 15$. Om vi adderar de båda ekvationerna erhålls $3x + 3y = 30 \Rightarrow x + y = 10$, vilket ger $15 = x + 2y - 2z = x + y + y - 2z = 10 + y - 2z \Rightarrow y = 5 + 2z$, $x = 10 - y = 5 - 2z$. Sätter vi nu $z = t$ får vi $x = 5 - 2t$, $y = 5 + 2t$. Alltså $(x, y, z) = (5, 5, 0) + t(-2, 2, 1)$.

- Ortonormerade koordinatsystem i planet ($\mathbb{R}^2$) och rummet ($\mathbb{R}^3$) (där det kan vara ett högersystem eller ett vänstersystem). Varje punkt P i rummet har entydiga koordinater (x, y, z). Exempelvis har origo O koordinaterna $(0, 0, 0)$.

  Vektorn $\mathbf{r}$ från O till P kallas för lägesvektorn för punkten P och vi skriver $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Lägesvektorn betecknas alltså på exakt samma sätt som punkten $P = (x, y, z)$ (när de uttrycks med koordinaterna). Vi uttrycker oss ofta slarvigt och skriver t.ex. saker som "vektorn från punkten $\mathbf{r}_0 = (1, -2, 3)$ till punkten $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 2)$ fås genom att...", trots att det är fråga om lägesvektorer snarare än punkter.

  För lägesvektorn, som för övrigt är en helt godtycklig vektor i rummet, har vi

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

  Uttrycket $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ visar tydligt att det är fråga om en vektor och är, av just detta skäl, att föredra framför uttrycket (x, y, z).

  Längden av vektorn $\mathbf{r}$ betecknas $|\mathbf{r}|$ och definieras som $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Denna längd är lika med avståndet från punkten P till origo.

  Vektorn från en punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ till en punkt $B = (b_1, b_2, b_3)$ betecknas $\overrightarrow{AB}$ och vi har

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

  och

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

  vilket är lika med avståndet mellan A och B.

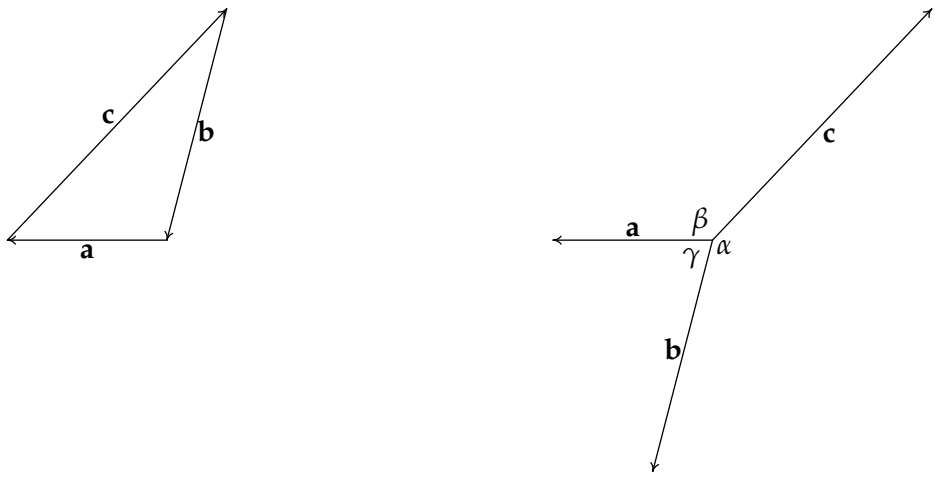
- Skalärprodukten av två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta,$$

  där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

  Exempel. För de tre vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gäller att $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 4$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{0}$. Bestäm $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ samt vinklarna mellan vektorerna.

Lösning. Att vektorsumman är noll betyder att när vi lägger vektorerna svans vid spets, som i den vänstra figuren, bildas en triangel. Låt γ vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Låt β vara vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ och låt slutligen α vara vinkeln mellan $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Se på den högra figuren, där vektorerna lagts med svansarna i samma punkt.



Genom att ta skalärprodukten av båda leden, i likheten $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\vec{0}$, med $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ respektive $\mathbf{c}$ får vi

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} &= 4+6\cos\gamma+8\cos\beta \\
0 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} &= 6\cos\gamma+9+12\cos\alpha \\
0 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} &= 8\cos\beta+12\cos\alpha+16
\end{aligned}$$

vilket ju är ett linjärt ekvationssystem med $\cos\gamma,\ \cos\beta,\ \cos\alpha$ som obekanta. Löser vi detta (gör det!) så får vi

$$\cos\gamma=\frac{1}{4},\quad \cos\beta=-\frac{11}{16},\quad \cos\alpha=-\frac{7}{8}.$$

Alltså gäller

$$\gamma=\arccos\frac{1}{4},\quad \beta=\arccos\left(-\frac{11}{16}\right),\quad \alpha=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$$

och

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{(2)(3)}{4}=\frac{3}{2},\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\frac{(2)(4)(-11)}{16}=-\frac{11}{2},\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\frac{(3)(4)(-7)}{8}=-\frac{21}{2}.$$

□

- Projektionen $\mathbf{u_v}$ av vektorn $\mathbf{u}$ längs vektorn $\mathbf{v}$, som ges av

$$\mathbf{u_v}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

Exempel. Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ vara som i föregående exempel. Bestäm projektionen av $\mathbf{a}$ längs $\mathbf{c}$ och projektionen av $\mathbf{c}$ längs $\mathbf{a}$.

Lösning. Enligt ovan har vi

$$\mathbf{a_c} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}\,\mathbf{c} = \frac{-\frac{11}{2}}{16}\,\mathbf{c} = -\frac{11}{32}\,\mathbf{c}, \quad \mathbf{c_a} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} = \frac{-\frac{11}{2}}{4}\,\mathbf{a} = -\frac{11}{8}\,\mathbf{a}.$$

□

- En normalekvation för ett plan har utseendet $ax + by + cz = d$. Vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c) = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ är en normal till planet. Ekvationen kan också skrivas som $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = d$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är lägesvektorn för en godtycklig punkt på planet.

  Planet delar rummet i två "halvor", så kallade halvrum. Punkterna som ligger i halvrummet som $\mathbf{n}$ pekar in i (det positiva halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} > d$, d.v.s $ax + by + cz > d$. Punkterna i det andra halvrummet (det negativa halvrummet) ges av olikheten $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} < d$, d.v.s $ax + by + cz < d$.

  Exempel. Avgör om punkterna $(1, -1, 1)$ och $(5, 5, 2)$ ligger på samma sida av planet $x - 2y + 3z = 4$.

  Lösning. Vi har

  $$(1) - 2(-1) + 3(1) = 6 > 4 \quad \text{och} \quad (5) - 2(5) + 3(2) = 1 < 4$$

  Den första punkten ligger därför på den positiva sidan av planet, medan den andra punkten ligger på den negativa sidan av planet. Punkterna ligger alltså inte på samma sida. □

  Ekvationen $-ax - by - cz = -d$ beskriver samma plan som ekvationen $ax + by + cz = d$. Vilken sida som är positiv beror på vilken ekvation vi väljer. Om vi i exemplet hade valt ekvationen $-x + 2y - 3z = -4$ för planet hade den första punkten legat på den negativa sidan medan den andra punkten hade legat på den positiva sidan.

- En ekvation på vektorform för den räta linjen som går genom punkten (x_0, y_0, z_0) parallellt med vektorn $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ är

  $$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3) = (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t, z_0 + v_3 t), \qquad -\infty < t < \infty.$$

  Mer kompakt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$, $\infty < t < \infty$.

- Om $\mathbf{v}$ ej är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ så skär linjen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$ planet $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = d$ i en unik punkt. Lägesvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{v}$, för skärningspunkten, uppfyller även ekvationen

  $$d = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{v}).$$

  Alltså

  $$d = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 + \tau\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

  Avståndet från $\mathbf{r}_0$ till skärningspunkten $\mathbf{r}$ är därför

  $$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 - d||\mathbf{v}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|}$$

  Om vi här låter $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ så går linjen vinkelrätt mot planet och skärningspunkten är den punkt på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$. Det betyder att skärningspunkten är

  $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}$$

och avståndet δ, från $\mathbf{r}_0$ till planet, är

$$\delta = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 - d||\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exempel. Bestäm, för varje reellt värde på konstanten d, avståndet δ från punkten $\mathbf{r}_0 = (5,5,2)$ till planet $x - 2y + 2z = d$. Ange även den punkt på planet som ligger nämast $\mathbf{r}_0$.

Lösning. Enligt ovanstående formel för avståndet punkt - plan får vi

$$\delta = \frac{|(5) - 2(5) + 2(2) - d|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-1-d|}{3} = \frac{|d+1|}{3}.$$

Speciellt ser vi att om $d = -1$ så är avståndet noll, d.v.s punkten $\mathbf{r}_0 = (5,5,2)$ ligger på planet. Punkten på planet som ligger närmast $\mathbf{r}_0$ är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = (5,5,2) + \frac{d+1}{3}\,(1,-2,2) = \left(\frac{16+d}{3}, \frac{13-2d}{3}, \frac{8+2d}{3}\right).$$

□

- En ekvation för sfären med centrum i $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och radien R är

$$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Antag nu att avståndet från planet $ax + by + cz = d$ till punkten $\mathbf{r}_0$ är δ, d.v.s

$$\delta = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

När det gäller avståndet mellan planet och sfären har vi tre fall:

- Om $\delta > R$ är avståndet mellan planet och sfären $\delta - R$.
- Om $\delta = R$ är avståndet mellan planet och sfären noll och planet tangerar sfären.
- Om $\delta < R$ är avståndet mellan planet och sfären fortfarande noll, men nu skär planet sfären längs en cirkel som har centrum i punkten där linjen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{n}$ skär planet (se ovan) och radien $\rho = \sqrt{R^2 - \delta^2}$.

  Exempel.

  (a) För vilka värden på d tangerar planet $x - 2y + 2z = d$ sfären $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 9$? Bestäm i förekommande fall även tangeringspunkten.

  (b) För vilka värden på d skär planet $x - 2y + 2z = d$ sfären $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 9$ i en cirkel? Bestäm i förekommande fall även cirkelns medelpunkt och radie.

  Lösning. Vi utnyttjar ovanstående uträkningar och får:

  (a) Sfären har centrum i $(5,5,2)$ och radien 3. Planet kommer därför att tangera sfären omm avståndet δ, från planet till $(5,5,2)$, också är lika med 3. Detta ger oss ekvationen

  $$\frac{|d+1|}{3} = 3, \quad |d+1| = 9, \quad d+1 = \pm 9, \quad d = -1 \pm 9.$$

  Alltså har vi tangering då $d = 8$ eller $d = -10$. Tangeringspunkten är den punkt på planet som ligger närmast $(5,5,2)$. Då $d = 8$ är alltså tangeringspunkten $(8,-1,8)$ och då $d = -10$ är tangeringspunkten $(2,11,-4)$.

(b) Skärningen är en cirkel då

$$\delta = \frac{|d+1|}{3} < 3,$$

vilket ger $-10 < d < 8$. Skärningscirkeln har radien

$$\rho = \sqrt{3^2 - \delta^2} = \frac{\sqrt{80 - 2d - d^2}}{3} = \frac{\sqrt{(10+d)(8-d)}}{3}$$

och centrum i punkten

$$\left(\frac{16+d}{3}, \frac{13-2d}{3}, \frac{8+2d}{3}\right).$$

□

- Cirkulära cylindrar, t.ex. $x^2 + y^2 = 4$, se fig. 10.6. Paraboliska cylindrar, t.ex. $z = x^2$, se fig. 10.7.

- Mängden av alla punkter som ligger ovanför planet $z = 1$ och under, eller på, planet $z = 3$ beskrivs av den dubbla olikheten $1 < z \leq 3$.
- Punkterna (x, y, z) som uppfyller båda olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 < 4$, $x - y + 2z > 0$ bildar ett (öppet) halvklot, närmare bestämt den klothalva som ligger på den positiva sidan av planet.

Euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$, linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Följande är viktigt:

- $\mathbb{R}^n$ är rummet av alla n-tipplar $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ibland är det lämpligt att se vektorerna som kolonnmatriser, ibland som radmatriser.
- $\mathbb{R}^n$ är försett med skalärprodukten $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Vi tolkar $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ som vektorns längd och

  $$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}\right)$$

  som vinkeln mellan vektorerna.
- Om $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ är vektorerer i $\mathbb{R}^m$ och $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är reella tal så sägs summan

  $$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

  vara en **linjärkombination** av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ med **koefficienterna** $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Om vi bildar matrisen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ med vektorerna

  $$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

som kolonner och kolonnvektorn $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ så gäller

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Vektorn $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är alltså en linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart ($x_1, \ldots, x_n$ är koefficienterna i de linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ som är lika med $\mathbf{b}$).

- Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$) kallas för **linjära höljet** av $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ och betecknas i läroboken med $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\}$. Om $W = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ så gäller att $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ och $\lambda\mathbf{u} \in W$. Det betyder att W är ett **delrum** till $\mathbb{R}^m$. Vektorerna $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ är **linjärt oberoende** om det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$. För att lösa $A\mathbf{x} = \vec{0}$ skriver vi systemet på matrisform $(A \mid \vec{0})$ och gör radoperationer tills vi får en reducerad trappmatris $(C \mid \vec{0})$. Kolonnerna i C är av två slag: Först har vi de så kallade **pivotkolonnerna** $\mathbf{c}_{j_1},\ \mathbf{c}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{c}_{j_r}$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$, där

$$\mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{j_2} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathbf{c}_{j_r} = \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorerna $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, m$ med en 1:a på j:te plats och resten nollor kallas för standardbasen i $\mathbb{R}^m$. Pivotkolonnerna utgörs av de r första av dessa vektorer. Det är möjligt att mer än en kolonn i C överensstämmer med $\mathbf{e}_j$, för något j. I så fall är det den av dessa kolonner som ligger längst till vänster, som är pivotkolonnen. För övriga kolonner $\mathbf{c}_k$, $k \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$ i C gäller att $\mathbf{c}_k$ är en linjärkombination av de pivotkolonner som ligger till vänster om $\mathbf{c}_k$ ($\mathbf{c}_{j_\nu}$ med $j_\nu < k$, se lösta exempel 2 och 3). Det finns alltså tal $x_1, \ldots, x_{k-1}$ (där $x_j = 0$ om $\mathbf{c}_j$ ej är pivotkolonn) sådana att $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{c}_{k-1} x_{k-1}$. Sätter vi nu $x_k = -1$, $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ så gäller alltså att $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Eftersom systemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \vec{0}$ följer att $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_{k-1} x_{k-1}$.

Pivotkolonnerna i A definieras som kolonnerna på samma platser som pivotkolonnerna i C (om $\mathbf{c}_{j_1},\ \mathbf{c}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{c}_{j_r}$ är pivotkolonnerna i C är alltså $\mathbf{a}_{j_1},\ \mathbf{a}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_{j_r}$ pivotkolonnerna i A). Vårt resonemang ovan visar att varje icke-pivotkolonn $\mathbf{a}_k$ i A kan skrivas som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A till vänster om $\mathbf{a}_k$. Koefficienterna i denna linjärkombination är identiska med koefficienterna då $\mathbf{c}_k$ uttrycks som en linjärkombination av pivotkolonnerna i C till vänster om $\mathbf{c}_k$. Å andra sidan kan ingen av pivotkolonnerna $\mathbf{a}_{j_1},\ \mathbf{a}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_{j_r}$ uttryckas som en linjärkombination av de övriga, d.v.s. pivotkolonnerna i A är linjärt oberoende. Vi säger att $\mathring{A} = \{\mathbf{a}_{j_1},\ \mathbf{a}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{a}_{j_r}\}$ är en **bas** i $W = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\}$. Varje vektor $\mathbf{w} \in W$ kan skrivas som en *unik* linjärkombination

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{a}_{j_1} + \lambda_2 \mathbf{a}_{j_2} + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_{j_r}$$

av basvektorerna. Koefficienterna $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ definieras som $\mathbf{w}$:s koordinater i basen $\mathring{A}$.

Speciellt ser vi att $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende om och endast om alla kolonner i A är pivotkolonner, vilket direkt framgår av att

$$(C \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \vec{0} \\ O & \vec{0} \end{array} \right)$$

där O är en nollmatris med $m-n$ rader. För att $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ skall kunna vara linjärt oberoende är det alltså nödvändigt (men inte tillräckligt!) att $m \geq n$.

Det linjära höljet av raderna i en matris A kallas för matrisens **radrum**. När man gör elementära radoperationer på en matris ändras inte radrummet. Alltså gäller att radrummet till den med A radekvivalenta reducerade trappmatrisen C är detsamma som A:s radrum. De nollskilda raderna i C är uppenbart linjärt oberoende och utgör därför en bas i A:s radrum.

- En linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en funktion $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med egenskaperna (L1) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ och (L2) $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$, för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och alla $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ för T är matrisen med kolonnerna $\mathbf{a}_1 = T(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{a}_2 = T(\mathbf{e}_2)$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n = T(\mathbf{e}_n)$, där $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Av (L1) och (L2) följer att $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Vi koncentrerar oss på de låga dimensionerna (2 och 3) och de geometriska egenskaperna hos sådana avbildningar.

- Rotation moturs vinkeln θ, av vektorerna i planet: Vi har då att $T(\vec{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ och $T(\vec{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ ($\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ är standardbasvektorerna). För standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, till T, gäller alltså att

$$A = AI_2 = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Projektion, av vektorerna i planet, på vektorn $\mathbf{n} = (a,b)$: Från kapitel 3 (se ovan) vet vi att

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{n}\,\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T\mathbf{v} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\mathbf{v} = A\mathbf{v},$$

  där

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

- Projektion, av vektorerna i planet, på den räta linjen $ax + by = 0$. Vektorn $(b, -a)$ är parallell med linjen så vi får direkt av (*) att $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, där

$$A = \frac{1}{b^2+a^2}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$$

- Spegling, av vektorerna i planet, i den räta linjen $ax + by = 0$: För en vektor $\mathbf{u}$ som är parallell med linjen gäller att $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ och för en vektor $\mathbf{v}$ som är vinkelrät mot linjen gäller att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Exempelvis har vi $T(b,-a) = (b,-a)$ och $T(a,b) = (-a,-b)$. För standardmatrisen $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, till T, gäller därför att

$$A\begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

  vilket ger

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

- Projektion, av vektorerna i rummet, på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$: Som i (*) får vi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, där

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \qquad (\#)$$

- Projektion, av vektorerna i rummet, på planet $ax + by + cz = 0$: Vi har här att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - Q\mathbf{v} = (I - Q)\mathbf{v}$, där Q är matrisen för projektionen, av vektorerna i rummet, på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (som ges av (#)). Alltså

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left\{\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad (**) \end{aligned}$$

- Spegling, av vektorerna i rummet, i planet $ax + by + cz = 0$: Här gäller att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2Q\mathbf{v} = (I - 2Q)\mathbf{v}$, där Q är matrisen för projektionen på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (som ges av (#)). Alltså

$$A = I - 2Q = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 \end{pmatrix}$$

- Om Q är matrisen (#) för projektionen på vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$, P är matrisen (**) för projektionen på planet $ax + by + cz = 0$ och S är matrisen för speglingen i planet $ax + by + cz = 0$ så gäller sambanden $Q^T = Q = Q^2$, $P^T = P = P^2$, $P + Q = I$, $PQ = QP = 0$ (nollmatris), $S^T = S = S^{-1}$ (d.v.s. $S^2 = I$) samt $S = 2P - I = I - 2Q$.