**UPPSALA UNIVERSITET**
**Matematiska institutionen**
Volodymyr Mazorchuk
Bo Styf

Prov i matematik
F2, X2, ES3, KandFys2, Lärare,
Frist, W2, KandMat1, Q2
LINJÄR ALGEBRA II
2010–08–24

*Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng.*

**1.** Låt $L \subset \mathbb{R}[x]_3$ vara det linjära höljet av polynomen $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1 - x$, $f_3(x) = x + x^2 + x^3$, $f_4(x) = -1 + x^2 + x^3$ och $f_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. Hitta en bas i $L$. Avgör även om polynomet $p(x) = x^2$ tillhör $L$ och om så är fallet bestäm $p$:s koordinater med avseende på den bas i $L$ som du hittade tidigare.

**2.** Låt $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bestäm $G$:s matris i standardbasen.

**3.** Låt $N$ vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)^t; \quad v_2 = (1, 1, 1, 1)^t; \quad v_3 = (0, 0, 1, 1)^t.$$

(a) Bestäm en ON bas i $N$.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $x = (2, 4, 6, 8)^t$ på $N$.

(c) Bestäm avståndet från $x$ till $N$ samt avståndet från $x$ till $N^\perp$.

**4.** Visa att den linjära avbildning $G : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ som definieras genom $G(f(x)) = xf'(x) + f(x + 1)$ är diagonaliserbar. Bestäm alla egenvärden och motsvarande linjärt oberoende egenvektorer, $G$:s matris i en bas av egenvektorer samt transformationsmatrisen till denna bas.

**Var god vänd**

**5.** Lår $V$ vara det linjära rummet av alla $2\times 2$ matriser. Den linjära avbildningen $F : V \to V$ definieras genom $F(X) = AX$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i $F$:s värderum och en bas i $F$:s nollrum.

**6.** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisera matrisen $B$ i en ON bas och bestäm motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris.

**7.** Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x(t) + y(t), \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + 2y(t); \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

**8.** (a) Ge definitionen av en linjär avbildning.

(b) Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definieras genom

$$F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Avgör om $F$ är linjär.

(c) Avbildningen $G : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ definieras genom $G(a+bx+cx^2) = a^2+bx^3$. Avgör om $G$ är linjär.

**LYCKA TILL!**

**Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA II 2010–08–24**

**1.** $f_1(x)$, $f_3(x)$ och $f_5(x)$ utgör en bas i $L$, $p(x) \notin L$.

**2.** $[G]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.** En ON bas i $N$ är t.ex. $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t$.
$\mathrm{pr}_N(x) = (3,3,7,7)$.
Avståndet från $x$ till $N$ är 2. Avståndet från $x$ till $N^\perp$ är $\sqrt{116}$.

**4.** Egenvärden och mostvarande linjärt oberoende egenvektorer: $\lambda_1 = 1$ och $f_1(x) = 1$; $\lambda_2 = 2$ och $f_2(x) = 1 + x$; $\lambda_3 = 3$ och $f_3(x) = 3 + 4x + 2x^2$. Bas av egenvektorer: $\mathbf{f} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$.

$$[G]_{\mathbf{f}}^{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ (t.ex.).}$$

**5.** En bas i $F$:s värderum är t.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En bas i $F$:s nollrum är t.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**6.**

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ -1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}.$$

**7.** $x(t) = y(t) = \exp(3t)$.

**8.** (b) $F$ är linjär. (c) $G$ är inte linjär.

**Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA II 2010–08–24**

**Lösning till problem 1.** Vi skriver koordinaterna av alla våra polynom i standardbasen som kolonner i en matris och använder Gauß-elimination för att reducera matrisen till trappstegsformen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{2}-\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\boxed{4}-\boxed{2}]{\boxed{3}-\boxed{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\boxed{4}-\boxed{3}]{\boxed{1}-\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Det följer att polynom $f_1(x)$, $f_3(x)$ och $f_5(x)$ utgör en bas i $L$ och att polynomet $p(x)$ inte tillhör $L$.

**Lösning till problem 2.** Låt $\pi$ vara planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Vektorerna $v_1 = (1, 0, 1)^t$ och $v_2 = (0, 1, 1)^t$ är linjärt oberoende och ligger i $\pi$. Därför har vi $G(v_1) = v_1$ och $G(v_2) = v_2$. Vektorn $v_3 = (1, 1, -1)^t$ är ortogonal mot planet och därför vi har $G(v_3) = -v_3$.
Uppsätningen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$ eftersom vi har tre vektorer i ett tredimensionnellt rum, och dessa vektorer är linjärt oberoende eftersom determinanten för transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

från $\mathbf{e}$ till $\mathbf{v}$ är lika med $-3 \neq 0$. I basen $\mathbf{v}$ vi har:

$$[G]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

För att anväda basbyte formeln ska vi bestämma inversen till $T$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{3}\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\boxed{2}-\boxed{3}]{\boxed{1}-\boxed{3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Nu kan vi använda basbyte formeln:

$$[G]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}} = T[G]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösning till problem 3.** Vi har $v_2 = v_1 + v_3$ och således $N = \langle v_1, v_3 \rangle$. Vektorerna $v_1$ och $v_3$ är ortogonalla och därför linjärt oberoende. En ON-bas i $N$ ges då av vektorerna $w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$ och $w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2$.
Den ortogonala projektionen av $x$ på $N$ beräknas på följande sätt:

$$\mathrm{pr}_N(x) = (x, w_1)w_1 + (x, w_2)w_2 = \frac{6}{2}(1,1,0,0) + \frac{14}{2}(0,0,1,1) = (3,3,7,7).$$

Avståndet från $x$ till $N$ är:

$$|x - \mathrm{pr}_N(x)| = |(-1,1,-1,1)| = \sqrt{1+1+1+1} = 2.$$

Avståndet från $x$ till $N^\perp$ är:

$$|\mathrm{pr}_N(x)| = |(3,3,7,7)| = \sqrt{9+9+49+49} = \sqrt{116}.$$

**Lösning till problem 4.** Eftersom $G(1) = 1$, $G(x) = 2x + 1$ och $G(x^2) = 3x^2 + 2x + 1$, avbildningen $G$ har följande matris i standardbasen:

$$A = [G]_{\mathrm{std}}^{\mathrm{std}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med sekularpolynomet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Alltså, egenvärden av $A$ är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$. Eftersom alla egenvärden är olika, är avbildningen diagonaliserbar och motsvarande diagonala matrisen är:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(egenvärden i tur och ordning på huvuddiagonalen).
Nu kan vi bestämma transformationsmatrisen.
För $\lambda_1 = 1$ måste vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet har en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_1 = (1,0,0)^t$ som motsvarar egenvektorn $f_1(x) = 1$.

För $\lambda_2 = 2$ har homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_2 = (1, 1, 0)^t$. Detta motsvarar egenvektorn $f_2(x) = 1 + x$.
För $\lambda_3 = 3$ har homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_3 = (3, 4, 2)^t$. Detta motsvarar egenvektorn $f_3(x) = 3 + 4x + 2x^2$.
Alltså, transformationsmatrisen är t.ex:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Lösning till problem 5.** Vi väljer förlande bas i $V$: $\mathbf{e} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$, där

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$F(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(e_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Således får vi följande matris för $F$ i basen $\mathbf{e}$:

$$[F]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi reducerar denna matris till trappstegsformen med hjälp av Gaußelimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det följer att matriserna

$$F(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad F(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $F$:s värderum.

Lösningarna till ovanstående systemet på parameterformen ser ut så här:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Detta medför att matriserna

$$e_{11} - e_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad e_{22} - e_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $F$:s nollrum.

**Lösning till problem 6.** Vi börjar med sekularpolynomet:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{1}+\boxed{4} \\ \boxed{2}+\boxed{4} \\ \boxed{3}+\boxed{4}}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{4}+\boxed{1} \\ \boxed{4}+\boxed{2} \\ \boxed{4}+\boxed{3}}}{=} (1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^3.$$

Vi har egenvärden $\lambda_1 = 5$ av multipicitet 1 och $\lambda_2 = 1$ av multipicitet 3.
För att bestäma en egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 5$ ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Detta system har en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_1 = (1,1,1,-1)^t$. Vi normerar denna vektor och får $w_1 = \dfrac{v_1}{|v_1|} = \dfrac{1}{2}(1,1,1,-1)^t$.
För att bestäma alla egenvektorer med egenvärdet $\lambda_1 = 1$ ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - 1E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna $v_2 = (1,0,0,1)^t$, $v_3 = (0,1,0,1)^t$ och $v_4 = (0,0,1,1)^t$ är linjärt oberoende lösningar till systemet. Vi ortonormerar dem med hjälp av Gram-Schmidts metod: $w_2 =$

$\dfrac{v_2}{|v_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t$; $\overline{w}_3 = v_3 - \dfrac{(v_3,v_2)}{(v_2,v_2)}v_2 = (-1/2,1,0,1/2)$ och $w_3 = \dfrac{\overline{w}_3}{|\overline{w}_3|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0,1)^t$.
Vidare $\overline{w}_4 = v_4 - (v_4,w_2)w_2 - (v_4,w_3)w_3 = (-1/3,-1/3,1,1/3)$ och $w_4 = \dfrac{\overline{w}_4}{|\overline{w}_4|} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,3,1)^t$.
Detta ger oss följande diagonalformen och transformationsmatris:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ -1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}.$$

**Lösning till problem 7.** Vi skriver systemet på följande formen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

och försöker att diagonalisera systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A$:s sekularpolynom är:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3).$$

Vi har två olika egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$ som innebär att $A$ är diagonaliserbar med diagonalformen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorer till $\lambda_1 = 1$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En linjärt oberoende lösning är t.ex. $v_1 = (1,-1)$.
Egenvektorer till $\lambda_1 = 1$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En linjärt oberoende lösning är t.ex. $v_2 = (1,1)$.
Vi får därmed transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och identiteter $D = T^{-1}AT$, $A = TDT^{-1}$, där

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu byter $x(t)$ och $y(t)$ mot respektive $u(t)$ och $v(t)$ sådant att

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

vi får systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} &= u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= 3v(t); \end{cases} \qquad u(0) = 0, v(0) = 1.$$

Ekvationen $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)$ har allmän lösning $u(t) = C\exp(t)$. Från $0 = u(0) = C\exp(0)$ vi får $C = 0$ och därmed $u(t) = 0$.
Ekvationen $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 3v(t)$ har allmän lösning $v(t) = C\exp(3t)$. Från $1 = v(0) = C\exp(0)$ vi får $C = 1$ och därmed $v(t) = \exp(3t)$. Nu använder vi att

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

och får svaret $x(t) = y(t) = \exp(3t)$.

**Lösning till problem 8.** Låt $V$ och $W$ vara två linjära rum. En avbildning $F : V \to W$ säges att vara linjär om $F(x+y) = F(x) + F(y)$för alla $x, y \in V$ och $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ för alla $x \in V$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.
För alla $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gäller

$$F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_3 + b_3) - (a_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_3 - a_1 + b_3 - b_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_3 - b_1 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right).$$

För alla $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$F\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda a_2 \\ \lambda a_3 - \lambda a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + a_2) \\ \lambda(a_3 - a_1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix} = \lambda F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right).$$

Detta medför att $F$ är linjär.
Vi har $G(1) = 1$ och $G(2 \cdot 1) = G(2) = 2^2 = 4 \neq 2 \cdot G(1) = 2$. Detta medför att $G$ inte är linjär.