Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2010-09-26

Sammanfattning av föreläsningarna 14 - 17.

Föreläsning 14 28/9 2011:

- **Tillämpning på differentialekvationer.** Genom diagonalisering kan man lösa system av differentialekvationer av formen

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \tag{$*$}$$

  där A är en $n \times n$-matris och $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$ är den obekanta vektorvärda funktionen.

  – Det enklaste fallet är då A är en diagonalmatris

$$A = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  Systemet kan då skrivas

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t), \quad y_1(0) = C_1 \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t), \quad y_2(0) = C_2 \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t), \quad y_n(0) = C_n \end{aligned}$$

  och har lösningen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ y_n(t) &= C_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

  som kan skrivas

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = e^{Dt}\mathbf{y}(0)$$

  Den matrisvärda funktionen e^{Dt} har egenskaperna

$$e^{Dt_1}e^{Dt_2} = e^{D(t_1+t_2)} \quad \text{och} \quad \frac{d}{dt}e^{Dt} = De^{Dt} = e^{Dt}D$$

– **Exempel.** Systemet

$$\begin{array}{rcll} y_1'(t) & = & 2y_1(t), & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) & = & -3y_2(t), & y_2(0) = -2 \\ y_3'(t) & = & 0, & y_3(0) = 3 \end{array}$$

kan skrivas som $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = (1, -2, 3)^T$, där D är diagonalmatrisen med $2, -3, 0$ i diagonalen. Systemet har lösningen

$$\mathbf{y}(t) = e^{Dt}\mathbf{y}_0, \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{-3t} \\ 3 \end{pmatrix}$$

– Vi klarar även fallet då A är en diagonaliserbar matris. Då finns en inverterbar matris B, vars kolonner är en bas i $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A, sådan att $A = BDB^{-1}$, där D är diagonalmatrisen med A:s egenvärden i diagonalen. Ekvationen $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ kan skrivas $\mathbf{y}'(t) = BDB^{-1}\mathbf{y}(t)$. Om vi sätter $\mathbf{z}(t) = B^{-1}\mathbf{y}(t)$ och $\mathbf{z}_0 = B^{-1}\mathbf{y}_0$ så gäller $\mathbf{y}(t) = B\mathbf{z}(t)$ och

$$B\mathbf{z}'(t) = \mathbf{y}'(t) = BDB^{-1}\mathbf{y}(t) = BD\mathbf{z}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

Det högra systemet har lösningen $\mathbf{z}(t) = e^{Dt}\mathbf{z}_0$, vilket ger $\mathbf{y}(t) = Be^{Dt}\mathbf{z}_0$.
Vi sätter

$$e^{At} = Be^{Dt}B^{-1}$$

Den matrisvärda funktionen e^{At} har egenskaperna

$$e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)} \quad \text{och} \quad \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

– **Exempel.** Lös systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (1, -2, 3)^T$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -8 \\ 2 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

Lösning. Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -5 \\ 2 & 8-\lambda & -8 \\ 2 & 11 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -5 \\ 2-\lambda & 8-\lambda & -8 \\ 2-\lambda & 11 & -11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8-\lambda & -\lambda \\ 1 & 11 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8-\lambda & 1 \\ 1 & 11 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 1 \\ 0 & 11 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(0-\lambda)(-3-\lambda) \end{aligned}$$

Alltså $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

* Egenvektorerna till $\lambda_1 = 0$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 8 & -8 & 0 \\ 2 & 11 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $0 = x_1$, $x_2 = x_3$. Vi väljer $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)^T$.

* Egenvektorerna till $\lambda_2 = 2$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 2 & 11 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $x_1 = x_2 = x_3$. Vi väljer $\mathbf{b}_2 = (1,1,1)^T$.

* Egenvektorerna till $\lambda_3 = -3$ ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 11 & -8 & 0 \\ 2 & 11 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $3x_1 = x_3$, $3x_2 = 2x_3$. Vi väljer $\mathbf{b}_3 = (1,2,3)^T$.

Vi sätter

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och får} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}(0) = B^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

samt

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{y}(t) = B\mathbf{z}(t) = Be^{Dt}\mathbf{z}(0) = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -4e^{2t} \\ 5e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{2t} + 5e^{-3t} \\ -8 - 4e^{2t} + 10e^{-3t} \\ -8 - 4e^{2t} + 15e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Som kontroll sätter vi in $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 5 \\ -8 - 4 + 10 \\ -8 - 4 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

- **Kvadratiska former.** En kvadratisk form i n variabler är ett homogent andragradspolynom

$$h(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

Den kan även skrivas som

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$$

där $A = (a_{ik})$ är en symmetrisk matris; $a_{ik} = a_{ki}$, då $i > k$.

- **Exempel.**
  - $$h(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
  - $$h(x,y,z) = 2x^2 - 6yz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Diagonalisering av kvadratiska former.** Eftersom A är symmetrisk följer av spektralsatsen att det existerar en ortogonalmatris B, vars kolonner är en ON-bas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ i $\mathbb{E}^n$, bestående av egenvektorer till A, sådan att

  $$A = BDB^t = BDB^{-1} \quad \text{och} \quad D = B^tAB = B^{-1}AB,$$

  där

  $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  är diagonalmatrisen med A:s egenvärden i diagonalen. Gör vi nu koordinattransformationen $\mathbf{x} = B\mathbf{z}$, svarande mot basbytet $\underline{b} = \underline{e}B$, så gäller

  $$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^t\mathbf{x} = (B\mathbf{z})^t(B\mathbf{z}) = \mathbf{z}^tB^tB\mathbf{z} = \mathbf{z}^tI\mathbf{z} = \mathbf{z}^t\mathbf{z} = \|\mathbf{z}\|^2 \qquad (*)$$

  och

  $$h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{x} = (B\mathbf{z})^tA(B\mathbf{z}) = \mathbf{z}^tB^tAB\mathbf{z} = \mathbf{z}^tD\mathbf{z} = \lambda_1z_1^2 + \cdots + \lambda_nz_n^2$$

  Koordinaterna $\mathbf{z} = \mathbf{x}_b$ är den kvadratiska formens principalkoordinater. Motsvarande koordinataxlar pekar i riktningarna $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Enligt $(*)$ utgör principalkoordinaterna ett ON-system.

- **Sats.** Om vi ordnar A:s egenvektorer så att $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ och $\mathbf{x}$ är en enhetsvektor ($\|\mathbf{x}\| = 1$) så gäller

  $$\lambda_1 \geq \mathbf{x}^tA\mathbf{x} \geq \lambda_n \qquad (\#)$$

  Det maximala värdet λ_1 antas då $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ och det minimala värdet λ_n antas då $\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$.

  Bevis. Påståendet följer av att

  $$\lambda_1 = \lambda_1(z_1^2 + \cdots + z_n^2) \geq \lambda_1z_1^2 + \cdots + \lambda_nz_n^2 \geq \lambda_n(z_1^2 + \cdots + z_n^2) = \lambda_n,$$

  där $\mathbf{x} = B\mathbf{z}$, $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$ och, enligt ovan, $\lambda_1z_1^2 + \cdots + \lambda_nz_n^2 = \mathbf{x}^tA\mathbf{x}$.
  Då $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ har vi

  $$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{b}_1^tA\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^t\lambda_1\mathbf{b}_1 = \lambda_1$$

  Då $\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ har vi

  $$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{b}_n^tA\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n^t\lambda_n\mathbf{b}_n = \lambda_n$$

  $\square$

- **Exempel.** Bestäm maximum och minimum av $x^2 - 4xy + z^2$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ange variabelvärden för vilka maximum respektive minimum antas.

Lösning. Vi har $x^2 - 4xy + z^2 = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

- Egenvektorerna till $\lambda_1 = 3$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x = -y$, $z = 0$. Vi väljer $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^t$.

- Egenvektorerna till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x = y$, $z = 0$. Vi väljer $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^t$.

Av det föregående drar vi följande slutsatser: Maximum av $x^2 - 4xy + z^2$ är 3, vilket antas då $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 0$. Minimum av $x^2 - 4xy + z^2$ är -1, vilket antas då $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 0$. $\square$

Föreläsning 15 - 17, 4 - 12/10 2011:

- **Positivt definita kvadratiska former.** Den kvadratiska formen $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ (eller matrisen A) sägs vara positivt definit om $h(\mathbf{x}) > 0$ då $\mathbf{x} \neq \vec{0}$. Av (#) följer att h är positivt definit om och endast om alla egenvärden till A är positiva. I allmänhet är dock beräkningen av egenvärdena svår så det behövs enklare metoder att avgöra frågan om en kvadratisk form är positivt definit.

  En användbar sats är här att A är positivt definit om och endast om alla hörndeterminanterna i A är positiva. Med hörndeterminanterna i A avses talen

  $$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_n = \det(A)$$

  Man kan även göra en kvadratkomplettering.

- **Exempel.** Låt $h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ och

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  För vilka $k \in \mathbb{R}$ är h positivt definit?

  Lösning 1. För hörndeterminanterna i A gäller

  $$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 2, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 2k^2$$

  Det framgår att $h(\mathbf{r})$ är poitivt definit om och endast om $3 - 2k^2 > 0$, alltså om och endast om $-\sqrt{\frac{3}{2}} < k < \sqrt{\frac{3}{2}}$. □

  Lösning 2. Med kvadratkomplettering får vi

  $$\begin{aligned} h(\mathbf{r}) &= x^2 + 2kxz + 2y^2 + 2yz + 2z^2 = (x + kz)^2 + 2y^2 + 2yz + (2 - k^2)z^2 \\ &= (x + kz)^2 + 2(y + \tfrac{1}{2}z)^2 + (2 - k^2 - \tfrac{1}{2})z^2 = (x + kz)^2 + 2(y + \tfrac{1}{2}z)^2 + (\tfrac{3}{2} - k^2)z^2 \end{aligned}$$

  vilket ger samma resultat. □

- **Exempel.** Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G\mathbf{y}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$ och

  $$G = \begin{pmatrix} 74 & -31 \\ -31 & 13 \end{pmatrix}$$

  definierar en skalärprodukt i $\mathbb{R}^2$. Bestäm även en matris C sådan att $C^t C = G$.

  Lösning. Vi ska visa att $\langle -, - \rangle$ är symmetrisk, additiv, homogen och positivt definit:

  – Att $\langle -, - \rangle$ är symmetrisk följer av

  $$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = (\mathbf{y}^t G\mathbf{x})^t = \mathbf{x}^t G^t \mathbf{y} = \mathbf{x}^t G\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

– Att $\langle -, - \rangle$ är additiv följer av

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \mathbf{x}^t G(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^t G\mathbf{y} + \mathbf{x}^t G\mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$$

– Att $\langle -, - \rangle$ är homogen följer av

$$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\lambda\mathbf{x})^t G\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}^t G\mathbf{y}) = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

– Att $\langle -, - \rangle$ är positivt definit är detsamma som att den kvadratiska formen $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^t G\mathbf{x}$ är positivt definit. Eftersom hörndeterminanterna i G är

$$\delta_1 = 74 > 0, \quad \text{och} \quad \delta_2 = \det(G) = (74)(13) - (-31)(-31) = 962 - 961 = 1 > 0$$

följer att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ är positiv.

Nu återstår att finna C: Om $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ är en ON-bas så gäller, för två godtyckliga vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, att

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2)\,\mathbf{b}_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)\,\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{y} &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (c_{11}y_1 + c_{12}y_2)\,\mathbf{b}_1 + (c_{21}y_1 + c_{22}y_2)\,\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_2 \rangle \\ &= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2)(c_{11}y_1 + c_{12}y_2) + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2)(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) \\ &= (C\mathbf{x}) \cdot (C\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t C^t C\mathbf{y}, \end{aligned}$$

där

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Eftersom Gram-matrisen i varje bas är unik måste vi ha $G = C^t C$.

Nästa steg är att ta fram en ortogonalbas $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$: Vi har

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G\mathbf{y} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 74 & -31 \\ -31 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 74y_1 - 31y_2 \\ -31y_1 + 13y_2 \end{pmatrix}$$

Det verkar vettigt att välja $\mathbf{a}_1 = \mathbf{y} \neq \vec{0}$ så att $\mathbf{y}$ har heltalskomponenter och $74y_1 - 31y_2$, $-31y_1 + 13y_2$ är två heltal nära 0. Ett hyfsat val är $\mathbf{y} = (1, 2)^t$, som ger $74y_1 - 31y_2 = 12$, $-31y_1 + 13y_2 = -5$. Bättre verkar dock $\mathbf{y} = (2, 5)^t$, som ger $74y_1 - 31y_2 = -7$, $-31y_1 + 13y_2 = 3$, så vi väljer att ta $\mathbf{a}_1 = (2, 5)^t$. För varje $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ gäller då att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = -7x_1 + 3x_2$$

Speciellt gäller att

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle = (2,\ 5) \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = -14 + 15 = 1$$

Turligt nog är alltså $\mathbf{a}_1$ en enhetsvektor, så vi kan sätta $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (2, 5)^t$. Vi ska nu välja $\vec{0} \neq \mathbf{a}_2 = \mathbf{x}$ så att

$$0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle = -7x_1 + 3x_2.$$

Enklaste valet är $\mathbf{a}_2 = (3,7)^t$. Eftersom

$$G\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 74 & -31 \\ -31 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 222-217 \\ -93+91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gäller, för en godtycklig $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle = (x_1,\ x_2) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 5x_1 - 2x_2$$

Speciellt gäller att

$$\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = 5(3) - 2(7) = 15 - 14 = 1$$

Även $\mathbf{a}_2$ visar sig alltså vara en enhetsvektor, så vi sätter $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 = (3,7)^t$. Eftersom $\underline{b}$ är en ON-bas gäller för skalärprodukten av två godtyckliga vektorer

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (-7x_1 + 3x_2)\,\mathbf{b}_1 + (5x_1 - 2x_2)\,\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{y} &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{b}_2 = (-7y_1 + 3y_2)\,\mathbf{b}_1 + (5y_1 - 2y_2)\,\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (-7x_1 + 3x_2)(-7y_1 + 3y_2) + (5x_1 - 2x_2)(5y_1 - 2y_2).$$

Vi kan av detta genast avläsa att

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollerar:

$$C^tC = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & -31 \\ -31 & 13 \end{pmatrix} = G.$$

□

- **Om hörndeterminanter.** På grund av visat intresse lägger vi här in ett bevis av satsen att en symmetrisk $n \times n$-matris $A = (a_{ij})$ är positivt definit (definieras som att $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ för varje nollskild vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) om och endast om determinanterna

$$\delta_k = \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

är positiva för $k = 1, \dots, n$.

Bevis. Vi påminner först om att A är positivt definit om och endast om alla egenvärden till A är positiva. A:s determinant måste då vara positiv, eftersom den är lika med produkten av egenvärdena. Dessutom gäller att A är positivt definit om och endast om alla matriser av formen B^tAB, där B är inverterbar, är positivt definita (sådana matriser sägs vara kongruenta med A). Antag nämligen att B^tAB inte är positivt definit. Då finns en nollskild vektor $\mathbf{z}$ sådan att $\mathbf{z}^tB^tAB\mathbf{z} \leq 0$. Vektorn $\mathbf{x} = B\mathbf{z}$ är då också nollskild och $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{z}^tB^tAB\mathbf{z} \leq 0$, vilket medför att A inte är positivt definit.

För en symmetrisk matris A gäller också, som vi vet, att det existerar en ortogonal matris U så att $U^tAU = D$, där D är diagonalmatrisen med A:s egenvärden i diagonalen. Om A är positivt definit och Δ är diagonalmatrisen vars diagonal består av (de positiva) kvadratrötterna till A:s egenvärden, så är Δ inverterbar och $\Delta^{-1}D\Delta^{-1} = I$ (enhetsmatrisen). Sätter vi nu $B = U\Delta^{-1}$ så gäller $B^tAB = \Delta^{-1}U^tAU\Delta^{-1} = \Delta^{-1}D\Delta^{-1} = I$. Varje positivt definit matris är alltså kongruent med enhetsmatrisen.

Nu till beviset av satsen: Om A är positivt definit så gäller att $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} > 0$ för varje nollskild vektor $\mathbf{x}$ av formen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^t$ $(k = 1, \ldots, n)$. Detta visar att varje $k \times k$-delmatris A_k, $k = 1, \ldots, n$, är positivt definit, vilket medför att $\delta_k > 0$.

Omvändningen visas med induktion med avseende på n: För $n = 1$ är satsen trivial. Antag nu att satsen är sann för alla matriser av ordning högst n (där $n \geq 1$) och att A är en symmetrisk matris av ordning $n+1$ med positiva hörndeterminanter. Delmatrisen A_n, av ordning n, är, enligt induktionsantagandet, positivt definit. Enligt ovan finns det därför en inverterbar matris B_n sådan att $B_n^tA_nB_n = I_n$. Sätter vi nu

$$B = \begin{pmatrix} B_n & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

så är B inverterbar och

$$B^tAB = \begin{pmatrix} B_n^t & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_n^t & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n & \vec{0} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t & \alpha \end{pmatrix} = C$$

där $\alpha = a_{n+1,n+1}$ och $\mathbf{a} = B_n^t\mathbf{a}_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$.

För den med A kongruenta matrisen C gäller att

$$\det C = \det \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t & \alpha \end{pmatrix} = \det(B^tAB) = (\det B)^2 \det A > 0.$$

Genom att från den sista raden subtrahera $(\alpha_1 \mathrm{rad}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{rad}_n)$ får vi

$$0 < \begin{vmatrix} I_n & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & \mathbf{a} \\ \vec{0}^t & \alpha - \mathbf{a}^t\mathbf{a} \end{vmatrix} = \alpha - \mathbf{a}^t\mathbf{a}. \qquad (*)$$

För en godtycklig vektor $X = (\mathbf{x}^t, \xi)^t$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ gäller att

$$X^tCX = (\mathbf{x}^t, \xi) \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^t & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^t\mathbf{a}\xi + \alpha\xi^2 = \|\mathbf{x} + \xi\mathbf{a}\|^2 + (\alpha - \mathbf{a}^t\mathbf{a})\xi^2.$$

Av $(*)$ följer att det sista uttrycket är positivt då $\xi \neq 0$ eller $\mathbf{x} \neq \vec{0}$, vilket betyder att C, och följaktligen även A, är positivt definit. □

- **Andragradsytor.** En andragradsyta med centrum i origo ((x, y, z) ligger på ytan om och endast om $(-x, -y, -z)$ ligger på ytan) har en ekvation av typen $\mathbf{r}^tA\mathbf{r} = k$, där A är en symmetrisk 3×3-matris och $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$. Genom en transformation till principalkoordinater $\mathbf{r}_b = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^t$, alltså koordinaterna i en ON-bas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ av egenvektorer till A, får ytan ekvationen

$$\mathbf{r}_b^tD\mathbf{r}_b = \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 = k$$

där D är diagonalmatrisen med A:s egenvärden i diagonalen. Beroende på tecknen, plus-minus- eller noll, på $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och k så kan ytan vara en ellipsoid, en hyperboloid (en- eller tvåmantlad), en kon, en cylinder (elliptisk eller hyperbolisk), två skärande plan två parallella plan (som kan sammanfalla). Det finns även fall då ytan degenererar till en rät linje (genom origo) eller en punkt (origo). Enda sättet att lära sig när de olika fallen uppträder är att gå igenom tillräckligt många exempel.

Ytan är en rotationsyta om och endast om två av egenvärdena är lika. Rotationsaxeln är då parallell med egenvektorerna till det tredje egenvärdet (det som är olika!).

Minsta avståndet från ytan till origo är det minsta av talen $\sqrt{k/\lambda_i}$, där vi bara betraktar egenvärden λ_i som har samma tecken som k. Låt oss ta tre exempel:

- På ellipsoiden
$$4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 36$$
ligger punkterna $(0, \pm 2, 0)$ närmast origo, på avståndet 2.
- På den enmantlade hyperboloiden
$$4\tilde{x}^2 - 9\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 36$$
ligger punkterna $(\pm 3, 0, 0)$ närmast origo, på avståndet 3.
- På den tvåmantlade hyperboloiden
$$-4\tilde{x}^2 - 9\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 36$$
ligger punkterna $(0, 0, \pm 6)$ närmast origo, på avståndet 6.

- Här tog genomgången av nytt material slut och repetition/problemlösning startade. Exempel på andragradsytor hittar du i de flesta gamla tentorna så vi tar inget här.

- **Vad kan man använda radoperationer till?** Vid många tillfällen under kursen har vi startat med en matris A och gjort radoperationer tills vi fått en (helst reducerad) trappmatris C. Det har då handlat om en av följande situationer:

  - För att finna en bas i det linjära höljet $M = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s]$, **bland** vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$, bildar vi matrisen $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ med vektorerna som kolonner. Om kolonnerna nummer $k_1, \ldots, k_r$ är pivotkolonner i C så är $(\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_r})$ en bas i M.
  - Skall vi lösa det dubbla problemet att hitta en bas i M, bland vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$, och sedan utvidga den funna basen, med hjälp av standardbasvektorer, till en bas i $\mathbb{R}^n$, så kan vi först bestämma basen $(\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_r})$ i M enligt ovan. Därefter sätter vi $A = (\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_r} | I_n)$ och gör radoperationer:
$$A \sim (G|F)$$
Om $\mathbf{f}_{j_1}, \ldots, \mathbf{f}_{j_p}$ är pivotkolonnerna i F (observera att alla kolonnerna i G är pivotkolonner) så skall $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_r}$ kompletteras med $\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}$ så erhålls en bas i $\mathbb{R}^n$.
  - Om man får använda en valfri metod för att finna en bas i $M = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s]$ så är det förmodligen bäst att lägga vektorerna som **rader** i en matris. Vi sätter alltså
$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{v}_s^t \end{pmatrix} \sim C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{c}_r^t \\ O \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$ är nollskilda vektorer och O är en nollmatris. Då är $(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r)$ en bas i M.

– Låt nu $M = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s]$ vara ett delrum till $\mathbb{E}^n$. För att i ett svep finna baser i både M och $M^\perp$ bildar vi matrisen $(A|\vec{0})$, där A är samma matris som i föregående punkt. Radoperationer ger oss $(A|\vec{0}) \sim (C|\vec{0})$. Transponaten av de nollskilda raderna i C är då en bas i M och $M^\perp = N(A)$ så en bas i $N(A)$ är en bas i $M^\perp$. Vill man sedan ha ortogonalbaser i M och $M^\perp$ får man tillgripa Gram-Schmidt.