Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Sammanfattning av föreläsningarna 1 - 4.

Föreläsning 1, 29/8 2011:

- **Om kursen.** Vi har två redovisningsuppgifter till varje lektion, som ger dig maximalt 2 bonuspoäng på tentan. Hur redovisningen går till kan du läsa om i dokument på kurshemsidan.
- **Repetition av linjär algebra och geometri 1.** Det är mycket viktigt att du repeterar matrisräkning, linjära ekvationssystem och vektorräkning (speciellt projektionen av en vektor längs en annan vektor). Läs igenom `repla1.pdf`, som du hittar på kurshemsidan.
- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lös, för alla $a \in \mathbb{R}$, ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bestäm pivotkolonnerna i A och uttryck, då så är möjligt, $\mathbf{b}$ och övriga kolonner i A som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

Lösning. Vi gör allt detta i ett svep: Några radoperationer ger

$$(A \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right) = (C \mid \mathbf{h})$$

Om $a + 3 \neq 0$ så står den sista raden i den högra matrisen för den orimliga ekvationen $0 = a + 3 (\neq 0)$, så systemet är olösbart då $a \neq -3$. Om däremot $a = -3$ så blir den högra matrisen

$$(C \mid \mathbf{h}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \qquad + 3x_3 = -2 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Vi ser att x_3 är en fri obekant, som vi kan välja ett godtyckligt värde på. De övriga obekanta kan uttryckas i x_3; $x_1 = -2 - 3x_3$, $x_2 = 4 + 2x_3$, $x_4 = -1$. Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har, då $a = -3$, alltså lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 3x_3 \\ 4 + 2x_3 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $x_3 \in \mathbb{R}$ är godtyckligt. Pivotkolonnerna i C är $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{c}_4$, vilket medför att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_4$. Vi ser direkt att $\mathbf{c}_3 = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$, av vilket följer att $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$. Då $a = -3$ gäller att $\mathbf{h} = -2\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_4$, av vilket följer att $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4$. □

- **Allmänna vektorrum.** En mängd V är ett vektorrum om operationerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\lambda\mathbf{u}$ är definierade för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ och alla $\lambda \in \mathbb{R}$ och dessa operationer uppfyller kraven på sidan 172 i läroboken. Dessa krav kan enkelt uttryckas som att man räknar med vektorerna i ett allmänt vektorrum precis som man räknar med de geometriska vektorerna i planet och rummet.

- **Exempel på vektorrum.** Här tog vi upp rummet
$$M_{mn} = \mathbb{R}^{(m,n)} = \mathbb{R}^{m\times n},$$
bestående av alla reella $m \times n$-matriser, och rummet $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$, bestående av alla reellvärda funktioner $\mathbf{x} = x(t)$ definierade för $-\infty < t < \infty$. För rummen av kolonnmatriser har vi specialbeteckningen
$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{(m,1)}$$
Det förekommer också att vi låter $\mathbb{R}^n$ beteckna rummet av reella radmatriser med n element.

- **Delrum.** W är ett delrum till V om V, W är vektorrum (med samma operationer) och W är en delmängd till V. För att visa att den icke-tomma delmängden W, till vektorrummet V, är ett delrum till V räcker det att visa att $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ och $\lambda\mathbf{u} \in W$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ och alla $\lambda \in \mathbb{R}$. Se Th.4.2.1, sid. 180.

- **Exempel på delrum.** Mängden
$$\mathcal{P}_n = \mathbb{R}[t]_n$$
bestående av alla reella polynom $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ är ett delrum till $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$. Andra delrum till $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$ är mängden $C(\mathbb{R}) = C(-\infty, \infty)$, bestående av alla kontinuerliga funktioner $\mathbf{x} = x(t)$, $-\infty < t < \infty$, mängden $C_0(\mathbb{R}) = C_0(-\infty, \infty)$, bestående av alla kontinuerliga funktioner $\mathbf{x} = x(t)$, $-\infty < t < \infty$ sådana att $x(t) \to 0$ då $|t| \to \infty$, samt mängden av alla 2π-periodiska kontinuerliga funktioner $\mathbf{x} = x(t)$, $-\infty < t < \infty$ ($x(t + 2\pi) = x(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$).

  Mängden $M_{33}^s = \mathbb{R}_s^{(3,3)}$, bestående av alla reella och symmetriska 3×3-matriser
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix}$$
är ett delrum till $M_{33} = \mathbb{R}^{(3,3)}$.

- **Linjärkombinationer.** En vektor $\mathbf{w} \in V$ sägs vara en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ om det finns tal $k_1, \ldots, k_r$ (koefficienterna i linjärkomb.) sådana att
$$\mathbf{v}_1 k_1 + \cdots + \mathbf{v}_r k_r = \mathbf{w} \qquad (*)$$
Detta kan även uttryckas som att $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ om och endast om vektorekvationen $(*)$ är lösbar. I fallet då $V = \mathbb{R}^n$ gäller därför att $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ om och endast om ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$, där A är $n \times r$-matrisen med $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ som kolonner, är lösbart.

- **Exempel.** För vilka $a \in \mathbb{R}$ är $\mathbf{w} = (a+1, a-1, 2a+1)^t$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (3,2,1)^t$? Bestäm i sådana fall tal k_1, k_2 sådana att $\mathbf{v}_1 k_1 + \mathbf{v}_2 k_2 = \mathbf{w}$.

  Lösning. I detta fall är $\mathbf{v}_1 k_1 + \mathbf{v}_2 k_2 = \mathbf{w}$ detsamma som det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & a+1 \\ 1 & 2 & a-1 \\ -1 & 1 & 2a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & a-5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3a-6 \end{array}\right)$$

  Av den högra matrisen framgår att systemet är lösbart om och endast om $3a - 6 = 0$, alltså $a = 2$, i vilket fall systemet har den entydiga lösningen $k_1 = a - 5 = -3$, $k_2 = 2$. Endast för $a = 2$ är alltså $\mathbf{w}$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Närmare bestämt gäller då att $\mathbf{w} = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$. $\square$

- **Planet och rummet.** $\mathbb{R}^2$ kan identifieras med de geometriska vektorerna i planet där $(x,y)^t \longleftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. På samma sätt kan $\mathbb{R}^3$ identifieras med de geometriska vektorerna i rummet. Vi visade att delrummen till $\mathbb{R}^2$ utgörs av $\{\vec{0}\}$, vektorerna parallella med en viss rät linje genom origo samt $\mathbb{R}^2$ självt. Delrummen $\{\vec{0}\}$ och $\mathbb{R}^2$ kallas för triviala delrum, de övriga delrummen sägs vara icke-triviala. Varje icke-trivialt delrum W till $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som $W = \{\lambda\mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, där $\mathbf{u}$ är en godtycklig nollskild vektor i W.

Föreläsning 2, 30/8 2011:

- **Linjära höljen.** Det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ definieras som mängden

$$W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r] = \{\mathbf{v}_1 k_1 + \cdots + \mathbf{v}_r k_r : k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}\}$$

  Man säger att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ **spänner upp** W. Följande gäller (Th.4.2.3, s.183):

  - W är ett delrum till V.
  - Om M är ett delrum till V och $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in M$ så är W ett delrum till M. Det betyder att W är det **minsta** delrummet till V som innehåller vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.

- **Exempel.** Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ så måste $r \geq n$.

  Bevis. Att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ spänner upp R^n är ekvivalent med att det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\big(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \mid \mathbf{w}\big) \sim \big(C \mid \mathbf{h}\big)$$

  (där $n \times r$-matrisen C är en reducerad trappmatris) är lösbart för varje $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Detta är fallet om och endast om det på matrisform skrivna ekvationssystemet $\big(C \mid \mathbf{h}\big)$ är lösbart för varje $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, vilket gäller om och endast om C har n pivotkolonner. Alltså måste $r \geq n$. □

- **Exempel.** Låt $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)^t$. Visa att $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ är (vektorerna i) ett plan genom origo och bestäm en ekvation för planet.

  Lösning. Vi har

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x+z \\ 0 & 1 & 2x-z \\ 0 & 0 & -5x+y+3z \end{array}\right)$$

  är lösbart. Av den högra matrisen framgår att $\mathbf{w} \in W$ om och endast om $-5x + y + 3z = 0$, alltså omm $\mathbf{w}$ ligger i planet med ekvationen $-5x + y + 3z = 0$, vilken kan skrivas $y = 5x - 3z$. Dessutom framgår att om så är fallet gäller att $\mathbf{w} = (-x+z)\mathbf{v}_1 + (2x-z)\mathbf{v}_2$. Vi gör en kontroll:

$$(-x+z)\mathbf{v}_1 + (2x-z)\mathbf{v}_2 = (-x+z)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (2x-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5x-3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  om och endast om $y = 5x - 3z$. □

- **Th.4.2.4.** Låt $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$. Mängden $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \vec{0}\}$ (nollrummet till A, vilket uppenbarligen är detsamma som lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$) är då ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

  Bevis. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in N(A)$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Av

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$A(\lambda\mathbf{u}) = \lambda A\mathbf{u} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

  följer att $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in N(A)$ och $\lambda\mathbf{u} \in N(A)$. □

Vi kommer senare att se att varje delrum till $\mathbb{R}^n$ är lika med $N(A)$, för en lämpligt vald A (det finns oändligt många matriser att välja bland).

- **Exempel.** Låt $\vec{0} \neq \mathbf{u} = (2,3)^t \in \mathbb{R}^2$ och låt $W = \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Finn en matris A sådan att $W = N(A)$.

  Lösning. Låt (α_1, α_2) vara en rad i A. Det ska då gälla att $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$, vilket är fallet om vi väljer $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = -2$. För 1×2-matrisen $A = (3,\ -2)$ gäller, å andra sidan, att $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 3\,x_1 - 2\,x_2 = 0\}$. Likheten $3\,x_1 - 2\,x_2 = 0$ är uppfylld om och endast om $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u}$, för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Detta innebär att $W = N(A)$. $\square$

- **Linjärt beroende och oberoende.** Låt $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ (vektorer i V förstås).
  - S (eller $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$) sägs vara **linjärt oberoende** om vektorekvationen
    $$\mathbf{v}_1 k_1 + \cdots + \mathbf{v}_r k_r = \vec{0}$$
    bara har lösningen $k_1 = \cdots = k_r = 0$.
  - I annat fall, det vill säga om vektorekvationen har fler lösningar än noll-lösningen, sägs S (eller vektorerna) vara **linjärt beroende**.

- **Linjärt beroende och oberoende i $\mathbb{R}^n$.** Då $V = \mathbb{R}^n$ är vektorekvationen
  $$\mathbf{v}_1 k_1 + \cdots + \mathbf{v}_r k_r = \vec{0}$$
  detsamma som det homogena ekvationssystemet med matrisformen $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \mid \vec{0})$. Genom radoperationer får vi
  $$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \mid \vec{0}) \sim (C \mid \vec{0})$$
  där C är en reducerad trappmatris. Om det finns kolonner i C som **inte** är pivotkolonner så har systemet oändligt många lösningar. Men då kan vektorerna inte vara linjärt oberoende (ty då skulle vi bara ha en lösning, nämligen noll-lösningen). Om vektorerna är linjärt oberoende är alltså C en reducerad trappmatris med enbart pivotkolonner och måste då ha formen
  $$C = \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$$
  där I_r är enhetsmatrisen av ordning r och, om $r < n$, O betecknar en $(n-r) \times r$-matris med nollor. Om, å andra sidan, C har denna form så har systemet $(C \mid \vec{0})$ endast noll-lösningen, vilket betyder att vektorerna är linjärt oberoende. Vi kan dra följande slutsatser:
  - Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende så måste $r \leq n$.
  - Om $r > n$ så måste $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ vara linjärt beroende.
  - Följande påståenden är ekvivalenta:
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende.
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ bildar en bas i $\mathbb{R}^n$.
    * Matrisen
      $$A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$
      har nollskild determinant (vilket är fallet om och endast om A är inverterbar).

- **Exempel.** Avgör om $(1,-1,2)^t, (1,2,1)^t, (1,8,-1)^t$ är linjärt beroende.

  Lösning. Då
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
  följer att vektorerna är linjärt beroende. $\square$

Föreläsning 3, 31/8 2011:

- **Bas och dimension.** Låt $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ vara en radmatris med vektorer i V. Vi definierar $\underline{a}$ som en **bas** i V om vektorerna i $\underline{a}$ är linjärt oberoende och spännner upp V. Det betyder att

  - Vektorekvationen
  $$\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \vec{0}$$
  har bara den triviala lösningen $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
  - För varje $\mathbf{b} \in V$ är ekvationen
  $$\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b} \qquad (*)$$
  entydigt lösbar. Om $(*)$ har de båda lösningarna $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_n$ respektive $x_1 = \mu_1, \ldots, x_n = \mu_n$ gäller nämligen att
  $$\begin{aligned} \vec{0} &= \mathbf{b} - \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}_1\lambda_1 + \cdots + \mathbf{a}_n\lambda_n - \mathbf{a}_1\mu_1 - \cdots - \mathbf{a}_n\mu_n \\ &= \mathbf{a}_1(\lambda_1 - \mu_1) + \cdots + \mathbf{a}_n(\lambda_n - \mu_n) \end{aligned}$$
  vilket, på grund av att $\underline{a}$ är linjärt oberoende, medför att
  $$0 = \lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n$$
  alltså att $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$.

- **Vårt sätt att beteckna baser.** I problemsamlingen i linjär algebra II, som du hittar länk till på kurshemsidan, skrivs en bas som en radmatris av vektorer och betecknas med en understruken bokstav. Till exempel är
$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
en bas i $\mathbb{R}^3$. Vi kommer också, för det mesta, att använda detta skrivsätt.

- **Koordinatvektorer.** Om $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är en bas i V gäller, enligt ovan, att för varje $\mathbf{v} \in V$ finns entydigt bestämda tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sådana att
$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$
Koordinatvektorn för $\mathbf{v}$, i basen $\underline{a}$, är vektorn
$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v})_a = \mathbf{v}_{\underline{a}} = (\mathbf{v})_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
På grund av att koordinaterna för en vektor är unika gäller då, till exempel, att $\mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, speciellt har vi $\mathbf{v}_a = \vec{0}$ om och endast om $\mathbf{v} = \vec{0}$. Vi har också sambanden
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_a = \mathbf{u}_a + \mathbf{v}_a, \qquad (\lambda\mathbf{u})_a = \lambda(\mathbf{u})_a \qquad (\#)$$
Genom att använda oss av koordinatvektorer kan vi utnyttja våra kunskaper om matriser och ekvationssystem för att lösa problem i ett godtyckligt vektorrum.

- **Sats.** Antag att $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är en bas i V och att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$. Då gäller följande:
  - $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är linjärt oberoende om och endast om $(\mathbf{v}_1)_a, \ldots, (\mathbf{v}_r)_a$ är linjärt oberoende.
  - Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är linjärt oberoende så är $r \leq n$.
  - Om $r > n$ så är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är linjärt beroende.
  - Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ spänner upp V så måste $r \geq n$.
  - Följande påståenden är ekvivalenta:
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ är linjärt oberoende.
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ spänner upp V.
    * Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ utgör en bas i V.
    * Matrisen
    $$A = \big((\mathbf{v}_1)_a, \ldots, (\mathbf{v}_n)_a\big)$$
    den så kallade **koordinatmatrisen** för vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, har nollskild determinant.

Bevis. Allt detta följer, via koordinatavbildningen $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_a$, av egenskaperna för vektorer i $\mathbb{R}^n$ som vi tidigare visade. □

- **Dimension.** Dimensionen av V betecknas $\dim V$ och definieras som antalet vektorer i en bas i V. Eftersom alla baser består av lika många vektorer är $\dim V$ väldefinierat.

- **Standardbaser.** Så fort vi har hittat en bas i V så kan vi alltså, via koordinatvektorer, lösa alla möjliga problem rörande vektorerna i V. I vissa av de rum vi betraktar finns det en (enkel) bas som betecknas som standardbas:
  - I $\mathbb{R}^n$ är standardbasen
  $$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
  - I $\mathbb{R}[t]_n = \mathcal{P}_n$ är standardbasen
  $$(1, t, \ldots, t^n)$$
  - I rummet $M_{33}^s = \mathbb{R}_s^{(3,3)}$, bestående av alla reella och symmetriska 3×3-matriser
  $$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix}$$
  är basen $\underline{E} = (E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5\ E_6)$, där
  $$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  speciellt enkel och kan därför sägas vara standardbas.

- **Att finna och utvidga baser.** Antag att $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ är en bas i V och att W är det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$.
  - För att finna en bas i W **bland** vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ bildar vi $n \times p$-matrisen
  $$A = \big((\mathbf{v}_1)_e, \ldots, (\mathbf{v}_p)_e\big) \sim C = \big(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p\big)$$
  där C är en (ej nödvändigtvis reducerad) trappmatris. Om $\mathbf{c}_{j_1}, \ldots, \mathbf{c}_{j_r}$ är pivotkolonnerna i C så är $\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r}$ en bas i W.
  - För att lösa problemet att först finna en bas i W bland vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ och sedan komplettera den funna basen, med vektorer från basen $\underline{e}$, till en bas i V bildar vi $n \times (p+n)$-matrisen
  $$(A \mid I_n) = \big((\mathbf{v}_1)_e, \ldots, (\mathbf{v}_p)_e \mid (\mathbf{e}_1)_e, \ldots, (\mathbf{e}_n)_e\big) \sim (C \mid F) = \big(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p \mid \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\big)$$
  där $(C \mid F)$ är en (ej nödvändigtvis reducerad) trappmatris. Om
  $$\mathbf{c}_{j_1}, \ldots, \mathbf{c}_{j_r} \mid \mathbf{f}_{k_1}, \ldots, \mathbf{f}_{k_s}$$
  är pivotkolonnerna i $(C \mid F)$ så är $\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r}$ en bas i W och $\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_s}$ (där $r + s = n$) är en bas i V.

- **Exempel.** Låt W vara delrummet till $\mathcal{P}_3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = 1 + 4t + t^2 + 4t^3$, $\mathbf{v}_2 = 2 + 5t + t^2 + 3t^3$, $\mathbf{v}_3 = 3 + 9t + 2t^2 + 7t^3$, $\mathbf{v}_4 = -3t - t^2 - 5t^3$ och $\mathbf{v}_5 = 3 + 5t + t^2 + 2t^3$. Bestäm en bas i W bland dessa vektorer och utvidga denna bas till en bas i $\mathcal{P}_3$, med hjälp av vektorer i standardbasen $\underline{e} = (1, t, t^2, t^3)$.

  Lösning. Vi bildar matrisen
  $$(A \mid I_4) = ((\mathbf{v}_1)_e, \ldots, (\mathbf{v}_5)_e \mid I_4) = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
  vilken, med några radoperationer, transformeras till
  $$(C \mid F) = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$
  Av denna reducerade trappmatris ser vi att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_5$ bildar en bas i W. Ytterligare ser vi att om denna bas i W kompletteras med en (men bara en) av vektorerna $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_3 = t^2$ eller $\mathbf{e}_4 = t^3$ så får vi en bas i $\mathcal{P}_3$. Däremot kan vi inte komplettera med $\mathbf{e}_2 = t$, ty $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5$ (vilket direkt framgår av andra kolonnen i matrisen F). $\square$

- **Kolonnrum, radrum, nollrum och rang.** Låt $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ (A är en $m \times n$-matris). Kolonnrummet till A definieras som delrummet till $\mathbb{R}^m$ som spänns upp av kolonnerna i A. Radrummet till A definieras som delrummet till $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av raderna i A. Nollrummet till A definieras, som vi redan vet, som
  $$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \vec{0}\}$$
  (lösningarna till det homogena ekvationssystemet med A som koefficientmatris). För att finna baser i dessa rum kan man gå tillväga så här:

- Starta med A och gör radoperationer tills en reducerad trappmatris C framkommer. A och C är radekvivalenta, vilket skrivs $A \sim C$ och innebär att den ena matrisen kan fås genom att starta med den andra och göra ett antal radoperationer.
- Om $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}$ är pivotkolonnerna i A så utgör de en bas i A:s kolonnrum.
- Eftersom radrummet ej förändras när man gör en radoperation i en matris kommer radrummet till C att vara detsamma som radrummet till A och de nollskilda raderna i C utgör en bas i A:s radrum. **Rangen** av matrisen A definieras som antalet nollskilda rader i C, som är lika med antalet pivotkolonner i C (och A). Alltså har rad- och kolonnrummen samma dimension, vilken är lika med A:s rang.
- Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar. Systemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är enkelt att lösa och av lösningen framgår en bas i $N(A)$. Antalet basvektorer är lika med antalet fria obekanta i systemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Alltså gäller att

$$\dim N(A) = n - r = s$$

  där n är antalet kolonner i A och r är rangen av A. Detta är den så kallade **dimensionssatsen**.
- Om $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ är de nollskilda raderna i C (radmatriser alltså och en bas i radrummet) och $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ (kolonnmatriser!) är en bas i $N(A)$ (där $r + s = n$ enligt föregående punkt) så bildar $(\vec{c}_1)^t, \ldots, (\vec{c}_r)^t$ (kolonnmatriser!) tillsammans med $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ en bas i $\mathbb{R}^n$. Detta kommer vi att bevisa senare, när vi behandlar inre produkter.

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i A:s kolonn-, rad- och nollrum. Utvidga basen i kolonnrummet, med hjälp av standardbasvektorer, till en bas i $\mathbb{R}^4$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i radrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i nollrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$.

Lösning. Vi känner igen matrisen från ett tidigare exempel. Med radoperationer får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av C framgår att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5$. Dessa tre vektorer utgör därför en bas i A:s kolonnrum. Som framgår av det tidigare exemplet kan man komplettera basen i kolonnrummet med en (men bara en) av vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ (men inte $\mathbf{e}_2$, ty $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5$) till en bas i $\mathbb{R}^4$. De nollskilda raderna i C är $\vec{c}_1 = (1, 0, 1, -2, 0), \vec{c}_2 = (0, 1, 1, 1, 0), \vec{c}_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Dessa bildar en bas i A:s radrum. Nollrummet till A utgörs av lösningarna till $C\mathbf{x} = \vec{0}$;

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

som ges av $x_1 = -x_3 + 2x_4$, $x_2 = -x_3 - x_4$, $x_5 = 0$, där x_3, x_4 kan väljas godtyckligt. $N(A)$ består alltså av vektorerna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 2x_4 \\ -x_3 - \ \ x_4 \\ x_3 \\ \qquad x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4$$

Vektorerna $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ bildar en bas i $N(A)$. Basen i radrummet kan utvidgas med (transponatet av) basen i nollrummet till en bas i (radvektorrummet) $\mathbb{R}^5$. Basen i nollrummet kan utvidgas med (transponatet av) basen i radrummet till en bas i (kolonnvektorrummet) $\mathbb{R}^5$.

Vill man inte använda sig av dessa utvidgningar kan man göra så här:

- Då tredje- och fjärde kolonnen i C är icke-pivotkolonner kan basen

  $$\vec{c}_1 = (1, 0, 1, -2, 0), \quad \vec{c}_2 = (0, 1, 1, 1, 0), \quad \vec{c}_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

  i radrummet utvidgas med $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ och $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, till en bas i $\mathbb{R}^5$.
- Då x_3 och x_4 är fria obekanta i systemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ kan basen $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ i $N(A)$ utvidgas med $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^t$ och $\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)^t$, till en bas i $\mathbb{R}^5$.

$\square$

Föreläsning 4, 5/9 2011:

- **Ett exempel på basbyte.** Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Visa att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Bestäm $\mathbf{v}_b$ om $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)^t$. För vilken vektor $\mathbf{u}$ gäller att $\mathbf{u}_b = (-1, -2, 5)^t$?

Lösning. Om $\mathbf{v}_b = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t$ så gäller $\mathbf{b}_1\lambda_1 + \mathbf{b}_2\lambda_2 + \mathbf{b}_3\lambda_3 = \mathbf{v}$, vilket är ekvationssystemet vars matrisform är $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{v})$, alltså

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 4 & 5 & 5 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -x_2 + 5x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + 2x_2 - 7x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 + 3x_3 \end{array}\right)$$

Att $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är linjärt oberoende och därmed en bas i $\mathbb{R}^3$ framgår av den högra matrisen (ty vi har enhetsmatrisen i vänsterledet). Av samma matris framgår också att

$$\mathbf{v}_b = (-x_2 + 5x_3, -x_1 + 2x_2 - 7x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)^t$$

Att $\mathbf{u}_b = (-1, -2, 5)^t$ innebär att

$$\mathbf{u} = -\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

- **Matrisen för ett basbyte.** Antag att $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ är två baser i vektorrummet V. De kvadratiska (ordning n) matriserna

$$T_{eb} = ((\mathbf{b}_1)_e, (\mathbf{b}_2)_e, \ldots, (\mathbf{b}_n)_e) \quad \text{och} \quad T_{be} = ((\mathbf{e}_1)_b, (\mathbf{e}_2)_b, \ldots, (\mathbf{e}_n)_b)$$

sägs vara matrisen för basbytet från $\underline{e}$ till $\underline{b}$, respektive från $\underline{b}$ till $\underline{e}$. Sambandet mellan de båda baserna är

$$\underline{b} = \underline{e}T_{eb} \quad \text{respektive} \quad \underline{e} = \underline{b}T_{be}$$

Sambanden mellan koordinatvektorerna $\mathbf{v}_e$ och $\mathbf{v}_b$, för en godtycklig vektor $\mathbf{v} \in V$ är då

$$\mathbf{v}_b = T_{be}\mathbf{v}_e \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_e = T_{eb}\mathbf{v}_b \tag{$*$}$$

De båda matriserna T_{eb} och T_{be} är alltid varandras inverser. Detta kan bevisas på följande sätt: Om det för två matriser A och B gäller att $\underline{e}A = \underline{e}B$ så måste $A = B$. Detta följer direkt av att koordinaterna för en vektor är unika. Av likheterna

$$\underline{e}\, I_n = \underline{e} = \underline{b}\, T_{be} = (\underline{e}\, T_{eb})\, T_{be} = \underline{e}\, (T_{eb}\, T_{be})$$

kan vi därför dra slutsatsen att , $I_n = T_{eb}\, T_{be}$, alltså att T_{eb} och T_{be} båda är inverterbara och inverser till varandra.

I ovanstående exempel har vi

$$T_{eb} = T_{be}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T_{be} = T_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Här vill vi passa på att varna för användandet av sambanden $(*)$ vid beräknandet av en vektors koordinater i olika baser. Det är mycket bättre att göra som vi gjorde i exemplet på basbyte. Se även den första uppgiften till lektion 2 i kryssproblemen för ht 2010 och naturligtvis den första uppgiften till lektion 2 i kryssproblemen för denna kurs.

- **Exempel.** Delrummen M och N, till $\mathbb{R}^4$, definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} \right] = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \qquad N = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = [\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$$

Bestäm en bas i skärningsrummet $M \cap N$.

Lösning. Vektorn $\mathbf{r}$ ligger i $M \cap N$ om och endast om det finns tal λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sådana att $\mathbf{r} = \mathbf{a}_1\lambda_1 + \mathbf{a}_2\lambda_2$ och $\mathbf{r} = \mathbf{a}_3\lambda_3 + \mathbf{a}_4\lambda_4$. Av detta följer att

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \mathbf{r} - \mathbf{r} \\ &= \mathbf{a}_1\lambda_1 + \mathbf{a}_2\lambda_2 + \mathbf{a}_3(-\lambda_3) + \mathbf{a}_4(-\lambda_4) \end{aligned} \qquad (*)$$

Omvänt, om $(*)$ gäller och vi sätter $\mathbf{r} = \mathbf{a}_1\lambda_1 + \mathbf{a}_2\lambda_2$, så gäller $\mathbf{r} = \mathbf{a}_3\lambda_3 + \mathbf{a}_4\lambda_4$, vilket innebär att $\mathbf{r}$ ligger i $M \cap N$. Vi söker därför lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$, där $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & -7 & 0 \\ 3 & -11 & -1 & 6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 5x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

som har lösningarna $x_1 = -5x_4 = 5t = \lambda_1$, $x_2 = -x_4 = t = \lambda_2$, $x_3 = 2x_4 = -2t = -\lambda_3$, där $x_4 = -t = -\lambda_4$ är godtyckligt. Av detta följer att vektorn $\mathbf{r}$ ligger i både M och N om och endast om

$$\mathbf{r} = 5t\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 = t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

för något $t \in \mathbb{R}$.

Alternativt har vi

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{a}_3 + t\mathbf{a}_4 = t\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$M \cap N$ är därför endimensionellt med basen $\underline{b} = ((7, 2, 3, 4)^t)$. $\square$