Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Sammanfattning av föreläsningarna 5 - 8.

Föreläsning 5, 8/9 2011:

- **IP-rum.** Ett IP-rum är ett vektorrum V försett med en inre produkt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ som är symmetrisk, additiv, homogen och positiv (se sid. 335 i boken).
- **Exempel på IP-rum.**
  - $\mathbb{E}^n$ är $\mathbb{R}^n$ försett med den euklidiska inre produkten
  $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
  - Om $C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ är inverterbar så är
  $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = C\mathbf{x} \cdot C\mathbf{y}$$
  en inre produkt på $\mathbb{R}^n$. Vi ska senare visa att varje inre produkt på $\mathbb{R}^n$ kan skrivas på detta sätt.
  - Om, till exempel,
  $$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
  så får vi i $\mathbb{R}^2$ den inre produkten
  $$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = C\mathbf{x} \cdot C\mathbf{y} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \end{aligned}$$
  - I rummet $C[-1, 1]$, bestående av alla kontinuerliga funktioner
  $$\mathbf{x} = x(t), \qquad -1 \le t \le 1,$$
  ges en inre produkt av
  $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) y(t)\, dt \qquad (*)$$
  - I alla delrum till $C[-1, 1]$ utgör förstås $(*)$ en inre produkt. Till exempel är $\mathcal{P}_2$, rummet av alla polynom av grad högst två, ett delrum till $C[-1, 1]$. För
  $$\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2, \qquad \mathbf{y} = y(t) = y_1 + y_2 t + y_3 t^2 \quad \in \mathcal{P}_2$$

gäller då

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x_1 + x_2 t + x_3 t^2)(y_1 + y_2 t + y_3 t^2)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) t + (x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) t^2 + (x_2 y_3 + x_3 y_2) t^3 + x_3 y_3 t^4]\, dt \\
&= x_1 y_1 + 0 + \tfrac{1}{3}(x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) + 0 + \tfrac{1}{5} x_3 y_3 \\
&= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_e^t G_e \mathbf{y}_e
\end{aligned}$$

där $\underline{e} = (1, t, t^2) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ är standardbasen i $\mathcal{P}_2$,

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{y}_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

är koordinatvektorerna, i basen $\underline{e}$, för $\mathbf{x}$ respektive $\mathbf{y}$ och $G_e = (g_{ik})$ är den så kallade Gram-matrisen för basen $\underline{e}$, vars element ges av

$$g_{ik} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^{i+k-2}\, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^{i+k-1}}{i+k-1} \right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 0 & \text{då } i+k \text{ är udda} \\ \dfrac{1}{i+k-1} & \text{då } i+k \text{ är jämnt} \end{cases}$$

- **Gram-matriser.** Det sista exemplet kan generaliseras: Om V är ett godtyckligt IP-rum av (för enkelhets skull) dimension tre och $\underline{e} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ är en bas i V så gäller

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e \mathbf{y}_e \quad \text{där} \quad G_e = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \end{pmatrix} = G_e^t$$

  För en godtycklig inre produkt $\langle -, - \rangle$ i ett godtyckligt vektorrum V (av ändlig dimension) finns det, för varje bas $\underline{e}$ i V, en symmetrisk matris $G_e = (g_{ik})$ sådan att $g_{ik} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle$ och

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e \mathbf{y}_e \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

  Matrisen G_e har även egenskapen att då $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ gäller $\mathbf{x}_e^t G_e \mathbf{x}_e > 0$. En sådan matris sägs vara **positiv** (eller positivt definit). Vi kommer senare att visa att det finns en inverterbar matris C sådan att $G_e = C^t C$. Av det följer att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_e^t C^t C \mathbf{y}_e = (C\mathbf{x}_e) \cdot (C\mathbf{y}_e) \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

- **Sats (Cauchy-Schwarz olikhet).** För två godtyckliga vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i ett IP-rum V gäller att

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

  Likhet mellan leden gäller om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella (en av vektorerna är en multipel av den andra).

Bevis. Om $\mathbf{u} = \vec{0}$ eller $\mathbf{v} = \vec{0}$ är båda leden noll och olikheten är trivialt sann. Vi kan därför anta att $\mathbf{u} \neq \vec{0}$ och $\mathbf{v} \neq \vec{0}$. För andragradspolynomet

$$p(t) = \langle t\mathbf{u} - \mathbf{v}, t\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = At^2 - 2Bt + C$$

gäller då att $A > 0$, $C > 0$, $p(t) \geq 0$ för alla t och $p(t_0) = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = t_0\mathbf{u}$. Polynomet antar minimum då $0 = p'(t) = 2At - 2B$, alltså $t = t_0 = \frac{B}{A}$. För minimivärdet gäller att

$$0 \leq p(t_0) = At_0^2 - 2Bt_0 + C = -\frac{B^2}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A}$$

och $0 = p(t_0)$ om och endast om $\mathbf{v} = t_0\mathbf{u}$. Detta kan även uttryckas som att $AC - B^2 \geq 0$ och $AC - B^2 = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella. Därmed är satsen bevisad. □

Olikheten kan alternativt skrivas

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

där $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ är **normen** av $\mathbf{u}$.

- **Vinklar.** Cauchy-Schwarz olikhet gör att vi kan definiera vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan två nollskilda vektorer genom

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Speciellt är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vinkelräta (eller ortogonala), vilket skrivs $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, om och endast om $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

För vinkelräta vektorer gäller **Pythagoras sats** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$. För godtyckliga vektorer gäller **triangelolikheten** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

- **Exempel.** Bestäm max och min av $x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$ då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

Lösning. Låt $\mathbf{a} = (1, -1, -3, 5)^t$ och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$. Då gäller

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4, \quad \|\mathbf{a}\| = 6, \quad \text{och} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$-6 = -\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x}\| \leq x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x}\| = 6,$$

där vi har likhet om och endast om $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Då $\mathbf{x}$ är en enhetsvektor följer att $1 = \|\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\| = 6|\lambda|$, vilket ger $\lambda = \pm\frac{1}{6}$. Av detta följer att maximum av $x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$ är 6 och minimum av $x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$ är -6. □

Föreläsning 6, 9/9 2011:

- **Ortogonala komplement.** Antag att V är ett IP-rum och att S är en delmängd till V. Det ortogonala komplementet $S^\perp$ till S definieras genom

$$S^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ för alla } \mathbf{w} \in S\}$$

- **Exempel.** Låt $S = \{\mathbf{w}_1 = (1,1,1)^t, \mathbf{w}_2 = (1,2,3)^t\}$ (i $\mathbb{E}^3$). Bestäm $S^\perp$.

  Lösning. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ ligger i $S^\perp$ om och endast om $\mathbf{x}$ är vinkelrät mot $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$, alltså omm

$$0 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

  av vilket följer att $0 = x_2 + 2x_3$, $x_2 = -2x_3$, $x_1 = x_3$, alltså $\mathbf{x} = x_3(1,-2,1)^t$. $S^\perp$ är alltså det endimensionella delrummet till $\mathbb{E}^3$ som spänns upp av $\mathbf{w}_3 = (1,-2,1)^t$. Delrummet $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = [S]$ kan även beskrivas som delrummet av alla vektorer som är ortogonala mot $\mathbf{w}_3$, alltså alla vektorer $\mathbf{x}$ sådana att

$$0 = \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{x} = x_1 - 2x_2 + x_3.$$

  □

- **Satser om ortogonala komplement.**
  - $S^\perp$ är ett delrum till V (även om S inte är det).
  - Om W är det linjära höljet av S så gäller $W^\perp = S^\perp$.
  - Om W är ett delrum till V så gäller $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ och $(W^\perp)^\perp = W$. Dessutom gäller att varje $\mathbf{x} \in V$ entydigt kan skrivas som en summa $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in W$ och $\mathbf{v} \in W^\perp$. Vi säger att $\mathbf{u}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på W och $\mathbf{v}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på $W^\perp$. Hur $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ beräknas visar vi nedan.
  - Om A är en $m \times n$-matris med radrummet W (sett som delrum av $\mathbb{E}^n$) så gäller $W^\perp = N(A)$ och $N(A)^\perp = W$.

- **Exempel.** Låt

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

  Bestäm baser i W och $W^\perp$.

  Lösning. Vi har $W = N(A)$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

  Av den högra matrisen framgår att $(\mathbf{v}_1)^t = (1,0,-1,1)$, $(\mathbf{v}_2)^t = (0,1,1,-2)$ är en bas i A:s radrum och att lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges av $x_1 = x_3 - x_4$, $x_2 = -x_3 + 2x_4$ (x_3, x_4 godtyckliga). Alltså ligger $\mathbf{x}$ i W om och endast om

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4$$

En bas i W är därför $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ och $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ är en bas i $W^\perp$ (observera att radrummet till A består av radvektorer, medan W och $W^\perp$ består av kolonnvektorer). $\square$

- **Ortogonala vektorer.** Vektorerna $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är ortogonala (eller vinkelräta) om $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_k$ (d.v.s $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_k \rangle = 0$) då $i \neq k$.

- **Sats.** Om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är ortogonala och nollskilda vektorer så är de linjärt oberoende.

  Lösning. Antag att
  $$\vec{0} = \mathbf{b}_1\lambda_1 + \cdots + \mathbf{b}_r\lambda_r$$
  Genom att ta inre produkten av båda leden med en godtycklig $\mathbf{b}_j$, $1 \leq j \leq r$, får vi
  $$0 = \langle \mathbf{b}_1\lambda_1 + \cdots + \mathbf{b}_r\lambda_r, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle \lambda_j,$$
  vilket medför att $\lambda_j = 0$ (för alla j). $\square$

- **Ortogonalbaser.** Av ovanstående sats följer att om V är ett IP-rum av dimension n och $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är ortogonala och nollskilda vektorer så är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ en bas i V. En sådan bas $\underline{b}$ sägs vara en ortogonalbas i V.

- **ON-baser.** Om $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ är en ortogonalbas i V och dessutom $\|\mathbf{b}_i\| = 1$, för alla i, så sägs $\underline{b}$ vara en ON-bas i V. I IP-rum föredrar man i allmänhet att arbeta med ON-baser (vid handräkning kan ibland ortogonalbaser vara att föredra).

- **Exempel.**
  - En ortogonalbas i $\mathbb{E}^3$ är
  $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
  - En ON-bas i $\mathbb{E}^3$ är
  $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- **Koordinater i en ortogonalbas.** Antag att W är ett delrum till IP-rummet V och att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är en ortogonalbas i W. Varje $\mathbf{u} \in W$ har entydiga koordinater $k_1, \ldots, k_r$ i basen $\underline{b}$;
  $$k_1\mathbf{b}_1 + \cdots + k_r\mathbf{b}_r = \mathbf{u}$$
  Genom att ta inre produkten av båda leden med en godtycklig basvektor $\mathbf{b}_i$ får vi
  $$k_i\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = \langle k_1\mathbf{b}_1 + \cdots + k_r\mathbf{b}_r, \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle \quad \Longrightarrow \quad k_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle}, \quad i = 1, \ldots, r.$$
  Alltså kan varje $\mathbf{u} \in W$ skrivas
  $$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle}\mathbf{b}_r \qquad (*)$$
  Om $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är en ON-bas i W förenklas detta till
  $$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_r \rangle \mathbf{b}_r$$

- **Inre produkten i en ortogonalbas.** Om $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är en ortogonalbas i W och $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ är två godtyckliga vektorer i W har vi

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle} \mathbf{b}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle} \mathbf{b}_r$$

och

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_r \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle}$$

Om $\underline{b}$ är en ON-bas förenklas detta till

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_r \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_r \rangle$$

- **Projektionen av en vektor på ett delrum.** Antag att W är ett delrum till V och att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är en ortogonalbas i W. Vi ska nu visa att varje $\mathbf{x} \in V$ entydigt kan skrivas som en summa $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in W$ och $\mathbf{v} \in W^\perp$. Vektorn $\mathbf{u}$ sägs vara den **ortogonala projektionen** av $\mathbf{x}$ på W (och $\mathbf{v}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på $W^\perp$).

  Först visar vi att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är entydigt bestämda (av $\mathbf{x}$): Om vi antar att $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in W$ och $\mathbf{v} \in W^\perp$ så får vi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b_j} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle \quad j = 1, \ldots, r.$$

  Det betyder, enligt $(*)$, att

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle} \mathbf{b}_r, \tag{\#}$$

  så $\mathbf{u}$ är entydigt bestämd (av $\mathbf{x}$). Följaktligen är även $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ entydigt bestämd (av $\mathbf{x}$). Dessutom gäller att $\mathbf{v} \in W^\perp$ ty för varje $j = 1 \ldots r$ har vi

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_j \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_j \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_j \rangle = 0.$$

  Eftersom $\mathbf{v}$ är ortogonal mot en bas i W så är $\mathbf{v}$ är ortogonal mot alla vektorer i W, alltså $\mathbf{v} \in W^\perp$. Av ovanstående följer även att (#) är en formel för beräkningen av den ortogonala projektionen på W av en godtycklig vektor $\mathbf{x} \in V$.

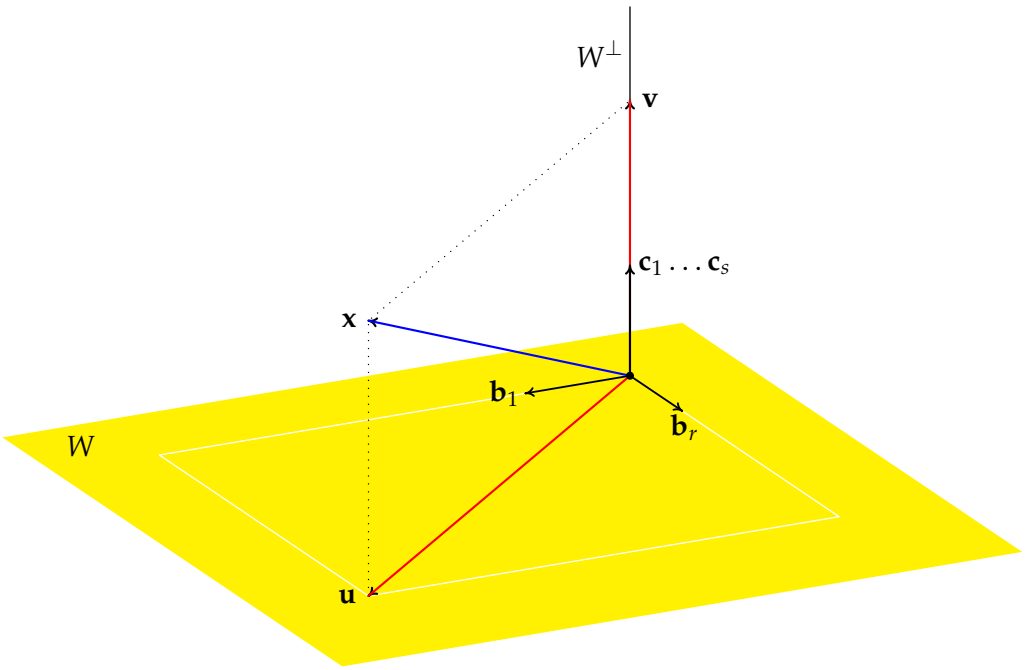
  Om $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s)$ är en ortogonalbas i $W^\perp$ så gäller, enligt samma resonemang som ovan, att

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle} \mathbf{c}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_s \rangle}{\langle \mathbf{c}_s, \mathbf{c}_s \rangle} \mathbf{c}_s$$

  Varje vektor $\mathbf{x} \in V$ kan alltså skrivas

$$\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_r \rangle}{\langle \mathbf{b}_r, \mathbf{b}_r \rangle} \mathbf{b}_r + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle} \mathbf{c}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_s \rangle}{\langle \mathbf{c}_s, \mathbf{c}_s \rangle} \mathbf{c}_s$$

  Det innebär att $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s)$ är en ortogonalbas i V och att $r + s = n$.



- **Gram-Schmidt.** Flera gånger ovan har vi utgått ifrån att det finns en ortogonalbas i varje delrum W till ett IP-rum V. Så är också fallet ty med utgångspunkt från en given bas $\underline{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ i W kan man enkelt, med Gram-Schmidt:s metod, finna en ortogonalbas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$ i W. Man gör så här:

  - Sätt först $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1$.
  - För att få en vektor $\mathbf{b}_2$ som är vinkelrät mot $\mathbf{b}_1$ sätter man $\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{p}_2$, där $\mathbf{p}_2$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}_2$ längs $\mathbf{b}_1$. Alltså

    $$\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1$$

    Vektorerna $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ spänner upp samma delrum som vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.
  - För att få en vektor $\mathbf{b}_3$ som är vinkelrät mot både $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ sätter man $\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{p}_3$, där $\mathbf{p}_3$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}_3$ på delrummet som spänns upp av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ (med andra ord $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$). Alltså

    $$\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle} \mathbf{b}_2$$

    Vektorerna $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och $\mathbf{b}_3$ spänner upp samma delrum som vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$.
  - På samma sätt fortsätter man fram till det sista steget då man sätter $\mathbf{b}_r = \mathbf{u}_r - \mathbf{p}_r$, där $\mathbf{p}_r$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}_r$ på delrummet som spänns upp av $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{r-1}$. Alltså

    $$\mathbf{b}_r = \mathbf{u}_r - \frac{\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 \ \cdots - \frac{\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{b}_{r-1} \rangle}{\langle \mathbf{b}_{r-1}, \mathbf{b}_{r-1} \rangle} \mathbf{b}_{r-1}$$

    Vektorerna $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ utgör en ortogonalbas i W.

- **Exempel.** Bestäm en ON-bas i delrummet M till $\mathbb{E}^4$, som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1,0)^t$, $\mathbf{u}_3 = (2,0,1,-2)^t$. Finn även projektionen av vektorn $\mathbf{w} = (1,2,-3,3)^t$ på M.

  Lösning. Vi följer Gram-Schmidt och bestämmer en ortogonalbas i M, som vi sedan normerar:

  - Först sätter vi $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1$, som är en vektor av längd $\sqrt{1+1+1+1} = 2$.
  - I nästa steg sätter vi

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  - Den tredje vektorn i ortogonalbasen fås genom

$$\mathbf{b}_3' = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

    Vid handräkning försöker vi undvika bråktal så vi tar $\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{b}_3' = (7,-5,3,-5)^t$.
  - Genom normering får vi ON-basen $\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{b}_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{b}_2,\ \frac{1}{6\sqrt{3}}\,\mathbf{b}_3\right)$ i M.

  Projektionen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{w}$ på M fås nu genom

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\,\mathbf{b}_3 = \frac{3}{4}\,\mathbf{b}_1 + \frac{-1}{2}\,\mathbf{b}_2 + \frac{-27}{108}\,\mathbf{b}_3$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  Alternativt får vi $\mathbf{p}$ som $\mathbf{p} = \mathbf{w} - \mathbf{q}$, där $\mathbf{q}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på $M^\perp$. $M^\perp$ har dimension ett, eftersom M har dimension tre. För att få fram $\mathbf{q}$ behöver vi en basvektor $\mathbf{b}_4$ i $M^\perp$. Vi får $\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$ som en lösning till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$, där A är 3×4-matrisen med $\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \mathbf{u}_3^t$ (eller $\mathbf{b}_1^t, \mathbf{b}_2^t, \mathbf{b}_3^t$) som rader:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \mathbf{u}_3^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \sim \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

  Av matrisen C framgår att $A\mathbf{x} = \vec{0}$ har lösningarna $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, där $x_1 = 4x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -6x_4$ och x_4 är godtyckligt. Vi väljer $x_4 = 1$, som ger $\mathbf{b}_4 = \mathbf{x} = (4,1,-6,1)^t$.

Detta ger

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = \mathbf{w} - \mathbf{q} &= \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_4\cdot\mathbf{b}_4}\,\mathbf{b}_4 = \mathbf{w} - \frac{27}{54}\,\mathbf{b}_4 = \mathbf{w} - \frac{1}{2}\,\mathbf{b}_4 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\square$

Föreläsning 7, 13/9 2011:

- **Exempel.** Låt

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

Bestäm ON-baser i W och $W^\perp$. Skriv även vektorn $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^t$ som en summa $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in W$ och $\mathbf{v} \in W^\perp$.

Lösning. I ett tidigare exempel fann vi en bas $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ i $W^\perp$ och en bas $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ i W, där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi får en ortogonalbas $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ i $W^\perp$ genom att köra Gram-Schmidt på $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$: Vi sätter först $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$ och sedan

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

På samma sätt får vi en ortogonalbas $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ i W genom att köra Gram-Schmidt på $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$: Först sätter vi $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3$. Sedan låter vi

$$\mathbf{b}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\,\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En ON-bas i $W^\perp$ är $(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_2)$ och en ON-bas i W är $(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_3, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_4)$.

Vi konstaterar att $\mathbf{u}$ är projektionen av $\mathbf{x}$ på W och $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{x}$ på $W^\perp$. För $\mathbf{u}$ gäller alltså

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\,\mathbf{b}_3 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{b}_4}\,\mathbf{b}_4 = \frac{2}{3}\,\mathbf{b}_3 + \frac{9}{3}\,\mathbf{b}_4 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och för $\mathbf{v}$ har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{x} - \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

- **Matrisavbildningar.** I linjär algebra och geometri 1 införde vi så kallade matrisavbildningar. En sådan är en funktion F från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ som ges av $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, där A är en $m \times n$-matris. A kallas för F:s standardmatris. Kolonnerna i A är $F(\mathbf{e}_1), \ldots, F(\mathbf{e}_n)$, där $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ är standardbasen i $\mathbb{E}^n$. Om, till exempel, F är avbildningen som vrider varje vektor $\mathbf{x}$, i planet, vinkeln θ moturs så gäller $F(\mathbf{x})_e = A\mathbf{x}_e$, där $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en ON-bas i planet (två vinkelräta pilar med längden 1) och

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ \sin\theta & \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- **Projektioner är matrisavbildningar.** Låt $F(\mathbf{x})$ vara ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ på ett delrum M. F är då en matrisavbildning, vilket vi visar genom att finna en $n \times n$-matris P sådan att $F(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$. Låt $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ vara en ortogonalbas i M. Då gäller, enligt ovan, att

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_r}{\mathbf{b}_r \cdot \mathbf{b}_r}\,\mathbf{b}_r$$

Kom nu ihåg att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^t\mathbf{x}$, $\mathbf{b}\lambda = \lambda\mathbf{b}$ och att matrismultiplikation är associativ, så att $\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^t\mathbf{x}) = (\mathbf{b}\,\mathbf{b}^t)\,\mathbf{x}$. Detta ger

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{x}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{1}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\,\left(\mathbf{b}\,\mathbf{b}^t\right)\,\mathbf{x}$$

Alltså har vi

$$F(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\left(\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_1^t\right) + \cdots + \frac{1}{\mathbf{b}_r \cdot \mathbf{b}_r}\left(\mathbf{b}_r\,\mathbf{b}_r^t\right)\right)\mathbf{x} = P\mathbf{x}$$

där

$$P = \frac{1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\left(\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_1^t\right) + \cdots + \frac{1}{\mathbf{b}_r \cdot \mathbf{b}_r}\left(\mathbf{b}_r\,\mathbf{b}_r^t\right) \qquad (*)$$

För matrisen P gäller att $P = P^t = P^2$. Den ortogonala projektionen på $M^\perp$ har standardmatrisen $Q = I - P$.

- **Exempel.** Delrummet M till $\mathbb{E}^4$ ges av $M = [(1,1,1,1)^t, (1,1,0,-2)^t]$. Bestäm standardmatrisen P för den ortogonala projektionen på M.

Lösning. En ortogonalbas i M bildas av $\mathbf{b}_1 = (1,1,1,1)^t$ och $\mathbf{b}_2 = (1,1,0,-2)^t$. Enligt $(*)$ gäller därför att

$$P = \frac{1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\left(\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_1^t\right) + \frac{1}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\left(\mathbf{b}_2\,\mathbf{b}_2^t\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}(1,1,0,-2)$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

□

- **Exempel.** Använd matrisen P i föregående exempel för att bestämma standardmatrisen Q för den ortogonala projektionen på $M^\perp$ och att skriva vektorn $\mathbf{w} = (1,2,3,0)^t$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^\perp$. Bestäm även avståndet från $\mathbf{w}$ till M.

  Lösning. Vi har

$$Q = I - P = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 & 1 \\ -5 & 7 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 9 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = P\mathbf{w} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  och

$$\mathbf{v} = Q\mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  □

  För avståndet δ från $\mathbf{w}$ till M har vi

$$\delta = |\mathbf{w} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{4+0+9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

- **Speglingar.** Låt F vara den ortogonala projektionen på delrummet M, till $\mathbb{E}^n$. Vi har då $F(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, där $P = P^t = PP$, enligt ovan. Ett naturligt sätt att definiera den ortogonala speglingen $\mathbf{s}$, av en vektor $\mathbf{x}$, i M är

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + 2(F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) = 2F(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = (2P - I)\mathbf{x}$$

  Matrisavbildningen G som ges av $G(\mathbf{x}) = S\mathbf{x}$, där $S = 2P - I$ kallas för den **ortogonala speglingen** i M. För S gäller att

$$S = S^t = S^{-1} = 2P - I = I - 2Q,$$

  där $Q = I - P$ är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på $M^\perp$. Matrisen S är alltså symmetrisk och har sig själv som invers, d.v.s $S^2 = I$.

- **Exempel.** Låt M vara som i föregående exempel. Bestäm standardmatrisen S för den ortogonala speglingen i M.

Lösning. Enligt ovan gäller

$$S = 2P - I = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

□

- **Mer om basbyten.** Antag att V är ett vektorrum av dimension tre med en bas $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Tre andra vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 &= 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Här går det att lösa ut $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ som linjärkombinationer av $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Efter en smula räknande får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Eftersom basvektorerna i $\underline{e}$ kan skrivas som linjärkombinationer av $\mathbf{b}_{1,2,3}$ så är även $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ en bas i V. Ovanstående samband mellan $\underline{e}$ och $\underline{b}$ kan även skrivas på matrisform enligt

$$\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{e}\, T_{eb}$$

och

$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{b}\, T_{be}$$

Erfarenheten visar att när man räknar ska man undvika att använda matrissambanden och i stället räkna med basvektorerna som vi gjorde först. Varje vektor $\mathbf{x} \in V$ kan uttryckas både i basen $\underline{e}$ och i basen $\underline{b}$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

För att få fram sambanden mellan $\mathbf{x}_e$ och $\mathbf{x}_b$ utnyttjar vi vektorsambanden:

$$\begin{aligned} \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3 &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \\ &= x_1(-3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) + x_2(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + x_3(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3) \\ &= (-3x_1 + 2x_2 + 2x_3)\mathbf{b}_1 + (x_1 - x_2)\mathbf{b}_2 + (x_1 - x_3)\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Koordinatsambanden är alltså

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -3x_1 + 2x_2 + 2x_3\\ \xi_2 &= x_1 - x_2\\ \xi_3 &= x_1 - x_3\end{aligned}$$

På matrisform blir detta

$$\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T_{be}\,\mathbf{x}_e$$

Antag nu att vi har en inre produkt $\langle -, - \rangle$ i V och att $\underline{b}$ råkar vara en ON-bas med avseende på denna inre produkt. Det betyder att skalärprodukten av två vektorer

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3 \quad \text{och} \quad \mathbf{y} = \eta_1\mathbf{b}_1 + \eta_2\mathbf{b}_2 + \eta_3\mathbf{b}_3$$

ges av

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_b^t\mathbf{y}_b = \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_b$$

Vill vi uttrycka $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ i $\underline{e}$-koordinaterna utnyttjar vi ovanstående koordinatsamband och får direkt

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= (-3x_1 + 2x_2 + 2x_3)(-3y_1 + 2y_2 + 2y_3) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3)\\ &= \begin{pmatrix} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = (C\mathbf{x}_e) \cdot (C\mathbf{y}_e) = \mathbf{x}_e^t C^t C \mathbf{y}_e\end{aligned}$$

där

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T_{be}$$

Eftersom det i varje IP-rum finns ON-baser kan vi generalisera ovanstående till:

För varje bas $\underline{e}$ i ett IP-rum V kan vi finna en inverterbar matris C sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (C\mathbf{x}_e) \cdot (C\mathbf{y}_e) = (C\mathbf{x}_e)^t(C\mathbf{y}_e) = \mathbf{x}_e^t C^t C \mathbf{y}_e = \mathbf{x}_e^t G_e \mathbf{y}_e \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

där $G_e = C^tC$ är den så kallade Gram-matrisen i basen $\underline{e}$. G_e är unik, till skillnad från C (som beror av både $\underline{e}$ och $\underline{b}$). I vårt exempel har vi

$$G_e = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = G_e^t$$

Föreläsning 8, 14/9 2011:

- **Exempel.** V är ett IP-rum, där $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas. Den inre produkten ges av $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e \, \mathbf{y}_e$, där

$$G_e = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en ON-bas i V och en matris C sådan att $G_e = C^t C$.

Lösning. Vi börjar med att bestämma en ortogonalbas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Vi har

$$G_e \mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_1 - 7x_2 - 7x_3 \\ -7x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ -7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

För att få enkla räkningar väljer vi att ta $\mathbf{b}_1 = \mathbf{x}$, där $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ är sådan att $G_e \mathbf{x}_e$ är en kolonnvektor med små heltalskoordinater. Om $\mathbf{x}_e = (2, 3, 0)^t$ får vi

$$G_e \mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

så vi väljer att ta $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. Då har vi $G_e(\mathbf{b}_1)_e = (1, 1, -2)^t$ och för varje $\mathbf{x} \in V$ gäller att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e (\mathbf{b}_1)_e = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 - 2x_3$$

Speciellt har vi $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 2 + 3 - 0 = 5$ och alltså $\|\mathbf{b}_1\| = \sqrt{5}$. Vektorn $\mathbf{x}$ är ortogonal mot $\mathbf{b}_1$ om och endast om $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Av alla vektorer som uppfyller detta villkor väljer vi att ta $\mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$, där $\mathbf{x}_e = (1, 1, 1)^t$, alltså $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. För varje $\mathbf{x} \in V$ gäller då att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e (\mathbf{b}_2)_e = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

Speciellt har vi $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle = -3 + 2 + 2 = 1$ och alltså $\|\mathbf{b}_2\| = 1$ (en enhetsvektor!). Av det föregående ser vi att vektorn $\mathbf{x}$ är ortogonal mot både $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ om och endast om $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och $-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Lösningarna till detta ekvationssystem ges av $5x_1 = 6x_3$, $5x_2 = 4x_3$, där x_3 kan väljas godtyckligt. Om vi väljer $x_3 = 5$ får vi $\mathbf{x}_e = (6, 4, 5)^t$. Som den tredje vektorn i ortogonalbasen tar vi därför $\mathbf{b}_3 = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$. Då har vi $G_e(\mathbf{b}_3)_e = (3, -2, -1)^t$ och för varje $\mathbf{x} \in V$ gäller att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_3 \rangle = \mathbf{x}_e^t G_e (\mathbf{b}_3)_e = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3x_1 - 2x_2 - x_3$$

Speciellt har vi $\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \rangle = 18 - 8 - 5 = 5$ och alltså $\|\mathbf{b}_3\| = \sqrt{5}$.

En ON-bas i V är $\underline{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, där

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\
\mathbf{v}_2 &= \tfrac{1}{1}\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v}_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{b}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,(6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

Då $\underline{b}$ är en ortogonalbas har vi utvecklingen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle}\,\mathbf{b}_2 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \rangle}\,\mathbf{b}_3 \\
&= \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{5}\,\mathbf{b}_1 + \frac{-3x_1 + 2x_2 + 2x_3}{1}\,\mathbf{b}_2 + \frac{3x_1 - 2x_2 - x_3}{5}\,\mathbf{b}_3 \\
&= \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{5}}\,\mathbf{v}_1 + \frac{-3x_1 + 2x_2 + 2x_3}{1}\,\mathbf{v}_2 + \frac{3x_1 - 2x_2 - x_3}{\sqrt{5}}\,\mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

Sambanden mellan koordinaterna $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, x_3)^t$ och $\mathbf{x}_v = (k_1, k_2, k_3)^t$ ges därför av

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \sqrt{5}(-3x_1 + 2x_2 + 2x_3) \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\mathbf{x}_e
\end{aligned}$$

För ordningens skull kontrollerar vi att $G_e = C^t C$:

$$\begin{aligned}
C^t C &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{5} & 3 \\ 1 & 2\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 2\sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 55 & -35 & -35 \\ -35 & 25 & 20 \\ -35 & 20 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = G_e
\end{aligned}$$

Tidigare visade vi att

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -7 \\ -7 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = G_e$$

Sammanfattningsvis har vi alltså funnit två olika matriser C sådana att $C^t C = G_e$. Genom att räkna fram andra ON-baser i V kan man finna fler C med egenskapen att $C^t C = G_e$. □

- **Ortogonalmatriser.** En $n \times n$-matris B sägs vara ortogonal om $B^t = B^{-1}$, alltså $B^t B = B\,B^t = I$. Följande är ekvivalenta
  - B är ortogonal.
  - B^t är ortogonal.

- Kolonnerna i B bildar en ON-bas i $\mathbb{E}^n$.
- Raderna i B bildar en ON-bas i $\mathbb{E}^n$.

- **Exempel.**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Sats.** Om A och B är ortogonala så är AB ortogonal.

Bevis.

$$(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I$$

$\square$