Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Sammanfattning av föreläsningarna 9 - 13.

Föreläsning 9, 16/9 2011:

- **Egenvärden och egenvektorer.** Låt A vara en $n \times n$-matris. En vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sägs vara en egenvektor till matrisavbildningen $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (eller till matrisen A) om $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ och det finns ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att $F(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, alltså om $F(\mathbf{x})$ är parallell med $\mathbf{x}$. Talet λ är **egenvärdet** som hör till egenvektorn $\mathbf{x}$. På samma sätt säger man att $\mathbf{x}$ är **en** egenvektor som hör till egenvärdet λ.

- **Exempel.**

  - Om $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ så gäller

    $$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = (1)\mathbf{x}$$

    för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Varje nollskild vektor är alltså en egenvektor, till egenvärdet 1.

  - Om $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ så gäller

    $$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

    För varje $\vec{0} \neq \mathbf{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{E}^2$ är vektorn $A\mathbf{x} = (-x_2, x_1)^t \neq \vec{0}$ vinkelrät mot $\mathbf{x}$ och kan därför inte vara parallell med $\mathbf{x}$. Det betyder att A saknar egenvektorer.

- **Egenrum.** $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ är ekvivalent med att $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \vec{0}$, alltså att $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet till matrisen $A - \lambda I$ ($N(A - \lambda I)$). Delrummet $N(A - \lambda I)$ kallas för det till egenvärdet λ hörande egenrummet. Eftersom systemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \vec{0}$ har icke-triviala lösningar (egenvektorn $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ är ju en sådan) så har egenrummet minst dimension ett.

  Om däremot λ **inte** är ett egenvärde så har $N(A - \lambda I)$ dimension noll (innehåller bara nollvektorn). Det betyder, till exempel, att A är inverterbar om och endast om 0 **inte** är ett egenvärde till A.

- **Beräkning av egenvärden och egenvektorer.** Ekvationssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \vec{0}$ har, som vi vet, icke-triviala lösningar om och endast om $\det(A - \lambda I) = 0$. Beräkningen sker därför i följande två steg:

  - Först löser du den **karakteristiska ekvationen**

    $$0 = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

Detta är förstås, i allmänhet, lättare sagt än gjort, eftersom algebraiska ekvationer av grad större än fyra i princip bara kan lösas numeriskt. Den karakteristiska ekvationen har, räknat med multiplicitet, n rötter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

– För vart och ett av egenvärdena fås motsvarande egenrum genom att lösa det homogena ekvationssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \vec{0}$ (på matrisform $(A - \lambda I|\vec{0})$).

- **Exempel.** Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$F(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_2)^t$$

Bestäm alla egenvärden till F och, för varje egenvärde, en bas i motsvarande egenrum.

Lösning. Vi har $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

– Först löser vi den karakteristiska ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(0-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Det framgår att egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

– Egenrummet till $\lambda_1 = 0$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - 0I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $x_1 + x_3 = 0$ och $x_2 = 0$. Egenrummet $N(A)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (-x_3, 0, x_3)^t = x_3(-1, 0, 1)^t$, där x_3 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_1) = ((1, 0, -1)^t)$.

– Egenrummet till $\lambda_2 = 2$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - 2I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $x_1 + x_3 = 0$ och $x_2 + 2x_3 = 0$. Egenrummet $N(A - 2I)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (-x_3, -2x_3, x_3)^t = x_3(-1, -2, 1)^t$, där x_3 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_2) = ((1, 2, -1)^t)$.

– Egenrummet till $\lambda_3 = 3$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - 3I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $x_1 + 4x_3 = 0$ och $x_2 + 2x_3 = 0$. Egenrummet $N(A - 3I)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (-4x_3, -3x_3, x_3)^t = x_3(-4, -3, 1)^t$, där x_3 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_3) = ((4, 3, -1)^t)$.

□

- **Diagonalisering.** För att resonemanget skall bli lättare att följa antar vi att A är en 3×3-matris. Vi betraktar alltså en matrisavbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, som ges av $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. F sägs vara diagonaliserbar om det finns en bas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i $\mathbb{R}^3$, bestående av egenvektorer till F. I så fall finns tre tal λ_1, λ_2, λ_3 (egenvärdena till F) sådana att $A\mathbf{b}_1 = \lambda_1\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{b}_2 = \lambda_2\mathbf{b}_2$, $A\mathbf{b}_3 = \lambda_3\mathbf{b}_3$. Låt B vara matrisen med $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ som kolonner. Vi har då

$$AB = A(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_3) = (\lambda_1\mathbf{b}_1, \lambda_2\mathbf{b}_2, \lambda_3\mathbf{b}_3) = BD,$$

där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

är diagonalmatrisen med egenvärdena i diagonalen. Av detta följer att

$$A = BDB^{-1}$$

Här är det lämpligt att dela upp B^{-1} i rader:

$$R = B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix}$$

Eftersom $I = RB = BR$ och $A = BDR$ har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = RB = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{b}_2 & \mathbf{r}_2\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{r}_3\mathbf{b}_1 & \mathbf{r}_3\mathbf{b}_2 & \mathbf{r}_3\mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$I = BR = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}_3\mathbf{r}_3$$

och

$$A = BDR = (\lambda_1\mathbf{b}_1, \lambda_2\mathbf{b}_2, \lambda_3\mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{b}_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3\mathbf{r}_3$$

Matriserna $P_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{r}_1$, $P_2 = \mathbf{b}_2\mathbf{r}_2$, $P_3 = \mathbf{b}_3\mathbf{r}_3$ är kvadratiska av ordning tre (ty var och en är produkten av en 3×1-matris med en 1×3-matris). Vi har

$$P_iP_k = (\mathbf{b}_i\mathbf{r}_i)(\mathbf{b}_k\mathbf{r}_k) = \mathbf{b}_i(\mathbf{r}_i\mathbf{b}_k)\mathbf{r}_k = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{b}_i\mathbf{r}_i = P_i, & \text{då } i = k \\ O, & \text{då } i \neq k \end{array} \right\}$$

$$P_i\mathbf{b}_k = (\mathbf{b}_i\mathbf{r}_i)\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_i(\mathbf{r}_i\mathbf{b}_k) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{b}_i, & \text{då } i = k \\ \vec{0}, & \text{då } i \neq k \end{array} \right\}$$

och

$$I = P_1 + P_2 + P_3, \quad A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

Matriser P med egenskapen att $P^2 = P$ kallas för projektionsmatriser. En godtycklig vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3$. Av ovanstående följer att

$$P_1\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{b}_1, \quad P_2\mathbf{x} = \xi_2\mathbf{b}_2, \quad P_3\mathbf{x} = \xi_3\mathbf{b}_3$$

och

$$A\mathbf{x} = \lambda_1\xi_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\xi_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\xi_3\mathbf{b}_3$$

- **Exempel.** Avbildningen F i föregående exempel är diagonaliserbar. Vi har där

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad R = B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{r}_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1,\ -3,\ -5) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \mathbf{b}_2\mathbf{r}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(-3,\ 3,\ -3) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \mathbf{b}_3\mathbf{r}_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}(2,\ 0,\ 2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$0P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Av egenskaperna hos P_1, P_2, P_3 följer även, till exempel:

$$A^n = 2^n P_2 + 3^n P_3, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$
$$A - \lambda I = (-\lambda)P_1 + (2-\lambda)P_2 + (3-\lambda)P_3$$
$$(A - \lambda I)^{-3} = (-\lambda)^{-3}P_1 + (2-\lambda)^{-3}P_2 + (3-\lambda)^{-3}P_3$$

- **Sats.** Om $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ har distinkta egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_i \neq \lambda_k$ då $i \neq k$) så är A diagonaliserbar.

Bevis. Antag att $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är egenvektorer till $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende så utgör de en bas i $\mathbb{R}^n$ och A är följaktligen diagonaliserbar. Om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är linjärt beroende så finns ett $m > 1$ så att $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}$ är linjärt oberoende och $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ är linjärt beroende. Då kan $\mathbf{b}_m$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}$:

$$\mathbf{b}_m = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{m-1}\mathbf{b}_{m-1} \qquad (*)$$

Av $(*)$ följer att

$$\lambda_m \mathbf{b}_m = A\mathbf{b}_m = c_1 A\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{m-1} A\mathbf{b}_{m-1} = c_1\lambda_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{m-1}\lambda_{m-1}\mathbf{b}_{m-1}$$

och att

$$\lambda_m \mathbf{b}_m = c_1\lambda_m\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{m-1}\lambda_m\mathbf{b}_{m-1}$$

Subtraktion ger

$$\vec{0} = \lambda_m\mathbf{b}_m - \lambda_m\mathbf{b}_m = c_1(\lambda_1 - \lambda_m)\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mathbf{b}_{m-1}$$

Då $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}$ är linjärt oberoende följer att

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \cdots = c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)$$

Eftersom egenvärdena är distinkta måste $0 = c_1 = \cdots = c_{m-1}$, vilket, enligt $(*)$, medför att $\mathbf{b}_m = \vec{0}$. Detta strider mot antagandet att $\mathbf{b}_m$ är en egenvektor. $\square$

- **Avbildningar som ej är diagonaliserbara.** Om A inte är diagonaliserbar och vi förutsätter att karakteristiska ekvationen bara har reella rötter, så måste, enligt ovanstående sats, ekvationen ha en multipelrot (till exempel $\lambda_1 = \lambda_2$).

  Ett exempel på en icke-diagonaliserbar matris är

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Egenvärdena ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

  Vi har därför $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Egenrummet ges av

$$(A - 2I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  svarande mot den enda ekvationen $x_2 = 0$, x_1 godtyckligt. Det enda egenrummet $N(A - 2I)$ består därför av vektorerna $\mathbf{x} = (x_1, 0)^t = x_1(1,0)^t$, $x_1 \in \mathbb{R}$ och är alltså endimensionellt (i stället för tvådimensionellt, som det skulle vara om A vore diagonaliserbar).

Föreläsning 10, 19/9 2011:

- **Algebraisk- och geometrisk multiplicitet.** Den algebraiska multipliciteten, α_1, hos ett egenvärde λ_1 är dess multiplicitet som rot till den karakteristiska ekvationen (enkelrot innebär algebraisk multiplicitet 1, dubbelrot innebär algebraisk multiplicitet 2 o.s.v). Den geometriska multipliciteten, γ_1, definieras som dimensionen av egenrummet $N(A - \lambda_1 I)$. För dessa multipliciteter gäller alltid olikheterna $1 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1$. En matris är diagonaliserbar om och endast om den geometriska multipliciteten är lika med den algebraiska multipliciteten, för varje egenvärde.

- **Icke-reella egenvärden.** Vi sysslar i denna kurs uteslutande med reella matriser. Trots att karakteristiska ekvationen då är reell kan den ändå ha icke-rella rötter. Låt, till exempel,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

    har då rötterna $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Om vi tillåter oss att räkna med komplexa vektorer och skalärer (och det finns inga hinder för detta) så får vi:
  - Egenrummet till $\lambda_1 = i$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - iI|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

    Den högra matrisen svarar mot ekvationen $x_1 - ix_2 = 0$, med lösningarna $x_1 = ix_2$, x_2 godtyckligt. Egenrummet $N(A - iI)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (ix_2, x_2)^t = x_2(i, 1)^t$, där x_2 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_1) = ((i, 1)^t)$.
  - Egenrummet till $\lambda_2 = -i$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A + iI|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

    Den högra matrisen svarar mot ekvationen $ix_1 - x_2 = 0$, med lösningarna $x_2 = ix_1$, x_1 godtyckligt. Egenrummet $N(A + iI)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (x_1, ix_1)^t = x_1(1, i)^t$, där x_1 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_2) = ((1, i)^t)$.
  - Sätter vi

$$B = (\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}(-i,\ 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \mathbf{b}_2\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1,\ -i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

    så gäller

$$A = BDR = iP_1 - iP_2,\ P_1^2 = P_1,\ P_2^2 = P_2, P_1P_2 = P_2P_1 = O.$$

    Alltså är A diagonaliserbar. Det är tidsbristen som gör att vi inte ägnar komplexa matriser och vektorer någon uppmärksamhet.

- **Ortogonal diagonaliserbarhet.** $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, sägs vara ortogonalt diagonaliserbar om det finns en ON-bas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ i $\mathbb{E}^n$ bestående av egenvektorer till F. Om vi låter B vara matrisen med $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ som kolonner och D är diagonalmatrisen med egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i diagonalen så gäller $B^{-1} = B^t$ och därför, enligt ovan, $A = BDB^t$. Av detta följer att

$$A^t = (BDB^t)^t = (B^t)^t D^t B^t = BDB^t = A.$$

  Endast symmetriska matriser kan alltså vara ortogonalt diagonaliserbara.

- **Spektralsatsen.** Denna berömda sats är omvändningen till det nyss sagda, alltså: Varje linjär operator $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, där A är symmetrisk, är ortogonalt diagonaliserbar. Det finns alltså en ortogonalmatris B och en reell diagonalmatris D så att $A = BDB^t$. Kolonnerna i B är ON-basen av egenvektorer till F och i D:s diagonal ligger egenvärdena.

- **Egenvektorer till skilda egenvärden måste vara ortogonala.** Svårigheten i beviset av spektralsatsen ligger i att visa att alla egenvärden är reella. När det är klart kan man lätt bevisa, till exempel, att om $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, där $\lambda \neq \mu$, så är $\mathbf{u}$ vinkelrät mot $\mathbf{v}$: Av

$$\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (A\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^t\mathbf{v} = \mathbf{u}^t A^t\mathbf{v} = \mathbf{u}^t(A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t(\mu\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

  får vi

$$(\lambda - \mu)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 0.$$

  Eftersom $\lambda \neq \mu$ följer att $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 0$.

- **Exempel.** Den linjära avbildningen $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ges av

$$F(\mathbf{x}) = (4x_1 - 4x_2 + 2x_3, -4x_1 + 4x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 7x_3)^t$$

  Visa att F är ortogonalt diagonaliserbar. Bestäm en ON-bas i varje egenrum, en ortogonal matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

  där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal,

$$P_1 + P_2 + P_3 = I,\ P_1^2 = P_1 = P_1^t,\ P_2^2 = P_2 = P_2^t,\ P_3^2 = P_3 = P_3^t$$

  och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O.$$

  Bestäm även A^n för varje heltal n.

  Lösning. Vi har $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

  Eftersom A är symmetrisk kan vi direkt säga att det finn en ON-bas $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i $\mathbb{E}^3$, bestående av egenvektorer till F. Det återstår dock att beräkna dessa och motsvarande egenvärden:

– Först löser vi den karakteristiska ekvationen:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8+\lambda & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (8-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (8-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Det framgår att egenvärdena är $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$ och $\lambda_3 = -1$.

– Egenrummet till $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - 8I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationen $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Vi har två fria obekanta x_2, x_3 som kan väljas godtyckligt. Vi väljer att sätta $x_2 = s$, $x_3 = 2t$, där s, t är godtyckliga, och får $x_1 = -s + t$. Egenrummet $N(A - 8I)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (-s+t, s, 2t)^T$, $s, t \in \mathbb{R}$. Väljer vi $s = -1$, $t = 0$, får vi vektorn $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0)^T$. Vektorn $\mathbf{u}_2 = (-s+t, s, 2t)^T$ är vinkelrät mot denna om

$$0 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (-s+t) - s = -2s + t$$

En lösning till denna ekvation fås om vi väljer $s = 1, t = 2$, vilket ger $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 4)^T$. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ är då en ortogonalbas i egenrummet. Genom normering fås ON-basen

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1, \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{u}_2\right) \text{ i } N(A - 8I).$$

– Egenrummet till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A + I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $x_1 + 2x_3 = 0$ och $x_2 + 2x_3 = 0$. Egenrummet $N(A + I)$ består därför av alla $\mathbf{x} = (-2x_3, -2x_3, x_3)^T = x_3(-2, -2, 1)^T$, där x_3 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{u}_3) = ((2, 2, -1)^T)$. En ON-bas är $(\mathbf{b}_3) = \left(\frac{1}{3}\mathbf{u}_3\right)$.

Detta kan enklare fås på följande sätt: Eftersom $N(A - 8I)$ består av alla vektorer som är vinkelräta mot $(2, 2, -1)^T$ och $\mathbf{b}_3$, enligt spektralsatsen, är vinkelrät mot alla vektorer i $N(A - 8I)$ så måste $\mathbf{b}_3$ vara parallell med $(2, 2, -1)^T$.

– Om vi sätter

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \quad R = B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$P_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,\ -1,\ 0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1^T = P_1^2$$

$$P_2 = \mathbf{b}_2\mathbf{b}_2^T = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 4) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} = P_2^T = P_2^2$$

$$P_3 = \mathbf{b}_3\mathbf{b}_3^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(2,\ 2,\ -1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = P_3^T = P_3^2$$

så gäller

$$A = BDB^T = 8P_1 + 8P_2 - P_3, \qquad P_1 + P_2 + P_3 = I \tag{$*$}$$

och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O.$$

Av $(*)$ följer genast att

$$A^n = 8^n(P_1 + P_2) + (-1)^n P_3 \quad \text{för varje heltal} \quad n.$$

$\square$

Föreläsning 11, 21/9 2011:

- **Allmänna linjära avbildningar.** En funktion $F : V \to W$, där V, W är vektorrum, sägs vara linjär om
  - $$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$
  - $$F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda\, F(\mathbf{x}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
- **Exempel.** Alla matrisavbildningar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, där $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och A är en $m \times n$-matris, är linjära avbildningar. Vi ska strax visa att, i viss mening, är alla linjära avbildningar matrisavbildningar.
- **Sammansättning av linjära avbildningar.**
  - Om $F : V \to W$ och $G : W \to L$ är linjära avbildningar så är $G \circ F : V \to L$ också en linjär avbildning.
  - Vi påminner om att funktionssammansättning i allmänhet, alltså inte bara för linjära funktioner, är associativ, det vill säga
  $$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$
- **Nollrum och värderum.** Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning. Nollrummet, eller kärnan, för F är mängden
  $$N(F) = \{\mathbf{x} \in V : F(\mathbf{x}) = \vec{0}\}.$$
  F:s värderum är mängden
  $$V(F) = \{F(\mathbf{x}) \in W : \mathbf{x} \in V\}.$$
  $N(F)$ är ett delrum till V och $V(F)$ är ett delrum till W. F sägs vara injektiv om $N(F) = \{\vec{0}\}$ och F sägs vara surjektiv om $V(F) = W$. En bijektiv, eller inverterbar, avbildning är en avbildning som är både injektiv och surjektiv. Om $F : V \to W$ är en bijektiv linjär avbildning så finns en unik linjär avbildning $G : W \to V$ sådan att $G \circ F = I_V$ och $F \circ G = I_W$ ($I_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v},\ \mathbf{v} \in V$, $I_W(\mathbf{w}) = \mathbf{w},\ \mathbf{w} \in W$). G, som brukar betecknas som F^{-1} är **inversen** till F.
- **Matriser för linjära avbildningar.** Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning. För att effektivt kunna räkna med F väljer vi en bas $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ i V och en bas $\underline{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ i W. Matrisen $[F]_{fe}$, för F, med avseende på dessa baser ges av
  $$[F]_{fe} = \big(F(\mathbf{e}_1)_f, \ldots, F(\mathbf{e}_n)_f\big)$$
  Vi har då
  $$F(\mathbf{x})_f = [F]_{fe}\mathbf{x}_e \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \in V.$$
  Alla problem rörande F kan, i princip, lösas genom betraktande av $[F]_{fe}$. Exempelvis gäller att F är inverterbar om och endast om $[F]_{fe}$ är en inverterbar matris och vi har då
  $$\big[F^{-1}\big]_{ef} = [F]_{fe}^{-1}$$

- **Exempel.** Visa att avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, som ges av

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(0) + x(1) \\ x'(-1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

är linjär och inverterbar. Bestäm $[F]_{fe}$ och $\left[F^{-1}\right]_{ef}$, där $\underline{e}$ och $\underline{f}$ är standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ respektive $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Eftersom $x'(t) = x_2 + 2x_3 t$, $x(0) = x_1$, $x(1) = x_1 + x_2 + x_3$ och $x'(-1) = x_2 - 2x_3$ har vi

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_e$$

För godtyckliga $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}_2$ och $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gäller därför

$$F(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})_e = \lambda A\mathbf{x}_e + \mu A\mathbf{y}_e = \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y})$$

Detta visar lineariteten. Då $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})_f$ har vi samtidigt visat att $[F]_{fe} = A$. Av

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = (3I \mid 3A^{-1})$$

följer slutligen att F är inverterbar och

$$\left[F^{-1}\right]_{ef} = A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

- **Dimensionssatsen.** Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning. Vi har tidigare sett att för en matris $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gäller att

$$\text{antalet kolonner i } A = \text{rangen av } A + \dim N(A)$$

Denna sats kan nu generaliseras till

$$\dim V = \dim V(F) + \dim N(F)$$

- **Exempel.** Låt $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ vara rummet av alla symmetriska 2×2-matriser och låt $F : \mathbb{R}_s^{(2,2)} \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av $F(X) = BX\mathbf{a}$, där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm $N(F)$ och $V(F)$.

Lösning. Standardbasen i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ är

$$\underline{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vi har

$$\begin{aligned} F(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \quad + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX_s \end{aligned}$$

Vi ser av detta att

$$[F]_{es} = A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen följer att $N(F)$ ges av ekvationssystemet $x_1 + x_3 = 0$ och $x_2 + x_3 = 0$, med lösningarna $x_1 = x_2 = -x_3$, där x_3 är godtyckligt. Alltså gäller

$$N(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Vi ser också att de båda första kolonnerna i A är pivotkolonner, alltså att

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

är en bas i $V(F)$. □

- **Exempel.** $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ ges av $F(\mathbf{x}) = F(x(t)) = x(t-1)$, där $\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$. Bestäm F:s matris i basen $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (t, t+1, t^2 - 1)$ och visa att F är bijektiv.

Lösning. Låt $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (1, t, t^2)$ vara standarbasen i $\mathcal{P}_2$. Vi har då sambanden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \qquad\quad \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= -\mathbf{e}_1 \qquad + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Genom enkel vektorräkning får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \quad \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Vi ska bestämma $[F]_{bb} = (F(\mathbf{b}_1)_b, F(\mathbf{b}_2)_b, F(\mathbf{b}_3)_b)$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_1) &= b_1(t-1) = (t-1) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 - (-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ F(\mathbf{b}_2) &= b_2(t-1) = (t-1) + 1 = t = \mathbf{b}_1 \\ F(\mathbf{b}_3) &= b_3(t-1) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_2 = -3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

Detta ger oss

$$[F]_{bb} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Då $\det[F]_{bb} = 1 \neq 0$ följer att F är bijektiv (inverterbar). $\square$

Föreläsning 12, 22/9 2011:

- **Exempel.** Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^{(2,2)}$ ges av

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) \\ x'(0) & x'(1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

Bestäm matrisen för F med avseende på standardbaserna och avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \in V(F)$$

Lösning. Vi påminner om att standardbasen i $\mathbb{R}^{(2,2)}$ är

$$\underline{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

För $\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ har vi $x'(t) = x_2 + 2x_3 t$, $x(0) = x_1$, $x(1) = x_1 + x_2 + x_3$, $x'(0) = x_2$ och $x'(1) = x_2 + 2x_3$. Alltså gäller

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 & x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{s}_1 + (x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{s}_2 + x_2 \mathbf{s}_3 + (x_2 + 2x_3)\mathbf{s}_4$$

Det följer att

$$F(\mathbf{x})_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [F]_{se} \mathbf{x}_e$$

Eftersom

$$Y_s = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

gäller att $Y \in V(F)$ om och endast om det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array} \right)$$

är lösbart. Av den högra matrisen framgår att detta är fallet om och endast om $a = 3$. $\square$

- **Exempel.** Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}_s^{(2,2)}$ ges av

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x(-1) & x(0) \\ x(0) & x(1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

Visa att F är inverterbar och bestäm matrisen för F^{-1} med avseende på standardbaserna.

Lösning. Vi påminner om att standardbasen i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ är

$$\underline{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

För $\mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ har vi $x(-1) = x_1 - x_2 + x_3$, $x(1) = x_1 + x_2 + x_3$ och $x(0) = x_1$. Alltså gäller

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 & x_1 \\ x_1 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2 + x_3)\mathbf{s}_1 + (x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{s}_2 + x_1 \mathbf{s}_3$$

Det följer att

$$F(\mathbf{x})_s = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [F]_{se} \mathbf{x}_e$$

Eftersom $\det[F]_{se} = -2 \neq 0$ är F inverterbar. En enkel matrisinvertering ger oss

$$\left[F^{-1}\right]_{es} = [F]_{se}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

□

- **Hur matrisen för en avbildning ändras vid basbyten.** Antag att $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ är två baser i V. Det finns då, som vi har sett, en inverterbar matris T_{eb}, med invers T_{be}, sådan att

  $$\underline{b} = \underline{e} T_{eb} \quad \text{och} \quad \underline{e} = \underline{b} T_{be}$$

  Mellan koordinatvektorerna $\mathbf{x}_e$ och $\mathbf{x}_b$, för en godtycklig vektor $\mathbf{x} \in V$, råder sambanden

  $$\mathbf{x}_b = T_{be} \mathbf{x}_e \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_e = T_{eb} \mathbf{x}_b$$

  Antag nu att $F : V \to W$ är en linjär avbildning samt att

  $$\underline{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \quad \text{och} \quad \underline{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m)$$

  är två baser i W. Av ovanstående samband följer att

  $$\begin{aligned} [F]_{fe} \mathbf{x}_e &= F(\mathbf{x})_f = T_{fc} F(\mathbf{x})_c = T_{fc} [F]_{cb} \mathbf{x}_b \\ &= T_{fc} [F]_{cb} T_{be} \mathbf{x}_e \end{aligned}$$

  Eftersom $\mathbf{x}_e$ är en godtycklig kolonnvektor kan vi dra slutsatsen att

  $$[F]_{fe} = T_{fc} [F]_{cb} T_{be} \quad \Longleftrightarrow \quad [F]_{cb} = T_{cf} [F]_{fe} T_{eb}$$

- **Hur enkel kan matrisen för en linjär avbildning bli?** Antag att $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$. Genom att göra ett antal radoperationer, utgående från A, kan vi transformera A till en reducerad trappmatris C. Om M är produkten av de elementära matriser som svarar mot radoperationerna som ledde från A till C så gäller att M är en inverterbar matris och $MA = C$. Omvänt kan varje inverterbar matris skrivas som en produkt av elementära matriser. Två

matriser A och C (som ej nödvändigtvis är en trappmatris) är därför radekvivalenta om och endast om det finns en inverterbar matris M sådan att $MA = C$.

Genom att göra **kolonnoperationer** på den reducerade trappmatrisen C kan vi lägga pivotkolonnerna till vänster i matrisen och förvandla alla icke-pivotkolonner till nollkolonner. Slutresultatet är en matris R av formen

$$R = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I är en enhetsmatris av ordning r, där r är rangen av A, och O:na betecknar nollmatriser. En kolonnoperation på en matris svarar mot multiplikation **till höger** med en elementär matris. Om B är produkten av de elementära matriser som svarar mot kolonnoperationerna som ledde från C till R så gäller att B är en inverterbar matris och $CB = R$.

Sammantaget betyder detta att för varje matris $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ finns det inverterbara matriser B, M sådana att $MAB = R$, där R är som ovan.

Antag nu att $F : V \to W$ är en linjär avbildning och att m, n är dimensionerna av W respektive V. Låt $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ vara en bas i V och låt $\underline{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ vara en bas i W. Sätt $A = [F]_{fe}$. Enligt ovan finns det inverterbara matriser B, M sådana att $MAB = R$. Då är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = \underline{e}B$ en bas i V ($B = T_{eb}$) och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m) = \underline{f}M^{-1}$ är en bas i W ($M = T_{cf}$). Dessutom gäller att

$$R = MAB = T_{cf}[F]_{fe}T_{eb} = [F]_{cb}$$

För varje linjär avbildning $F : V \to W$ kan man alltså finna baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, så att $[F]_{cb}$ är av formen R.

- **Exempel.** Antag att $F : V \to W$ är en linjär avbildning och

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Vad kan man utläsa av denna matris?

Lösning. Att $[F]_{cb}$ är en 4×6-matris betyder att V har dimensionen 6 och W har dimensionen 4. För baserna $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W gäller att

$$\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6) \qquad \underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$$

och

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_1) &= \mathbf{c}_1 \\ F(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{c}_2 \\ F(\mathbf{b}_3) &= \mathbf{c}_3 \\ F(\mathbf{b}_4) &= F(\mathbf{b}_5) = F(\mathbf{b}_6) = \vec{0} \end{aligned}$$

Av detta utläser vi att $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ är en bas i $V(F)$ och $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ är en bas i $N(F)$. $\square$

- **Exempel.** Antag att $\underline{e}$, $\underline{f}$ är baser i V respektive W, att $F : V \to W$ är linjär och att

$$[F]_{fe} = A = (\vec{0}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6) \sim R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

där varje # står för ett reellt tal. Finn baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, sådana att $[F]_{cb}$ ser ut som i $(*)$.

Lösning. Av A framgår att $F(\mathbf{e}_1) = \vec{0}$, $F(\mathbf{e}_2)_f = \mathbf{a}_2$, $F(\mathbf{e}_3)_f = \mathbf{a}_3$ och $F(\mathbf{e}_4)_f = \mathbf{a}_4$. Av R framgår dels att $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ är pivotkolonner i A och därför en bas i A:s kolonnrum, dels att $N(A)$ har dimension tre. Det betyder att $(F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_4))$ är en bas i $V(F)$. Vi sätter därför $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{b}_4 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{c}_2 = F(\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{c}_3 = F(\mathbf{e}_4)$. Eftersom $N(A)$ har dimension tre finns det två vektorer $\mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ sådana att $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ är en bas i $N(A)$. Om vi slutligen låter $\mathbf{c}_4$ vara en vektor, vilken som helst, som **inte** ligger i $V(F)$ så kommer $[F]_{cb}$ att se ut som i $(*)$. $\square$

Föreläsning 13, 27/9 2011:

- **Egenvektorer för en linjär operator.** Antag att $F : V \to V$ är en linjär operator på ett vektorrum V, med en bas $\underline{e}$. En vektor $\vec{0} \neq \mathbf{x} \in V$ sägs vara en egenvektor till F om det finns ett reellt tal λ så att $F(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Talet λ är egenvärdet som hör till $\mathbf{x}$. Att $F(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ är ekvivalent med att $[F]_{ee}\mathbf{x}_e = \lambda\mathbf{x}_e$. För att finna egenvärdena/egenvektorerna till F tar vi en godtycklig bas $\underline{e}$ och bestämmer egenvärdena/egenvektorerna till $[F]_{ee}$.

  Vi definierar, precis som vi gjorde med matrisavbildningar, F som diagonaliserbar om det finns en bas i V, som består av egenvektorer till F.

- **Exempel.** Den linjära operatorn F på $\mathcal{P}_2$ ges av

$$F(\mathbf{x}) = x(t-1) - tx'(t), \qquad \mathbf{x} = x(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

  Bestäm $V(F)$, $N(F)$ och alla egenvärden och egenrum.

  Lösning. Vi har $x'(t) = x_2 + 2x_3 t$ och

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= x(t-1) - tx'(t) = x_1 + x_2(t-1) + x_3(t-1)^2 - t(x_2 + 2x_3 t) \\ &= x_1 + x_2(-1+t) + x_3(1 - 2t + t^2) - x_2 t - 2x_3 t^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3) + (-2x_3)t + (-x_3)t^2 \end{aligned}$$

  Standardmatrisen för F är därför

$$A = [F]_{ee} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Av dessa matriser ser vi att $\mathbf{x} \in N(F)$ omm $0 = x_1 - x_2 = x_3$, $\Rightarrow N(F) = [1+t]$, samt att $V(F) = [1, 1 - 2t - t^2] = [1, 2t + t^2]$.

  Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(0-\lambda)(-1-\lambda)$$

  Alltså $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

  - Egenrummet till $\lambda_1 = 1$ ges av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad N(F - I) = [1]$$

  - Egenrummet till $\lambda_2 = 0$ är $N(F) = [1+t]$.
  - Egenrummet till $\lambda_3 = -1$ ges av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

    $x_3 = 2x_1$, $x_2 = 2x_3 = 4x_1$. $N(F + I) = [1 + 4t + 2t^2]$.

Polynomen $(1, 1+t, 1+4t+2t^2)$ utgör en bas i $\mathcal{P}_2$, bestående av egenvektorer till F, så F är diagonaliserbar. $\square$

- **Exempel.** Låt $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla symmetriska 2×2-matriser. En linjär operator F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 9x_2 - 6x_3 & -5x_1 + 10x_2 - 6x_3 \\ -5x_1 + 10x_2 - 6x_3 & -5x_1 + 11x_2 - 7x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och visa att F ej är diagonaliserbar.

Lösning. Standardbasen i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ är

$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Vi får

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &= \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = -4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 \\ F(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = 9\mathbf{e}_1 + 11\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 \\ F(\mathbf{e}_3) &= \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} = -6\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Standardmatrisen för F är därför

$$A = [F] = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -6 \\ -5 & 11 & -7 \\ -5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till F ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 & -6 \\ -5 & 11-\lambda & -7 \\ -5 & 10 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 9 & -6 \\ -1-\lambda & 11-\lambda & -7 \\ -1-\lambda & 10 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 1 & 11-\lambda & -7 \\ 1 & 10 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(-1-\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Alltså har vi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 9 & -6 & 0 \\ -5 & 10 & -7 & 0 \\ -5 & 10 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Egenrummet till $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ har dimension 1, så den geometriska multipliciteten är mindre än den algebraiska multipliciteten. F är alltså inte diagonaliserbar. $\square$

- **Similaritet.** Betrakta återigen en linjär operator $F : V \to V$. Om $\underline{e}$ och $\underline{b}$ är två baser i V gäller, enligt ovan

$$[F]_{bb} = T_{be}[F]_{ee}T_{eb} \quad \Longleftrightarrow \quad [F]_{ee} = T_{eb}[F]_{bb}T_{be}$$

Eftersom $T_{be} = T_{eb}^{-1}$ kan vi skriva

$$[F]_{bb} = T_{eb}^{-1}[F]_{ee}T_{eb} \quad \Longleftrightarrow \quad [F]_{ee} = T_{eb}[F]_{bb}T_{eb}^{-1}$$

Två kvadratiska matriser, A och B, sägs vara similära, vilket skrivs $A \sim B$, om det finns en inverterbar matris T så att $A = TBT^{-1}$. Observera att $A \sim B$ även kan betyda att A och B är radekvivalenta. Vilken betydelse som avses får man utläsa av sammanhanget.

Similära matriser har samma karakteristiska polynom. Detta visas av

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(TBT^{-1} - \lambda TIT^{-1}) = \det[T(B - \lambda I)T^{-1}] \\ &= \det(T)\det(B - \lambda I)\det(T^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I)\end{aligned}$$

För det karakteristiska polynomet av en $n \times n$-matris A har vi

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

Spåret av matrisen A är summan $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, av dess diagonalelement. Två similära matriser har alltså, bland annat, samma determinant och samma spår. Att A är diagonaliserbar är detsamma som att A är similär med en diagonalmatris D, med A:s egenvärden, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i diagonalen. Av detta följer att

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \quad \text{och} \quad a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Antag att A och B är två similära matriser av ordning n, $A = TBT^{-1}$, och att V är ett n-dimensionellt vektorrum med en bas $\underline{e}$. Det finns då en unik linjär operator $F : V \to V$ sådan att $[F]_{ee} = A$. Om vi sätter $\underline{b} = \underline{e}\,T$ så är $\underline{b}$ en bas i V och $[F]_{bb} = B$. Similära matriser kan alltså alltid ses som matriserna för en viss linjär operator F med avseende på två olika baser. Vilken av matriserna som används vid undersökningen av F är, i princip, egalt.

- **Isomorfismer.** En isomorfism mellan två vektorrum V och W är en bijektiv (inverterbar) linjär avbildning $F : V \to W$. Om det finns en isomorfism mellan V och W sägs V och W vara isomorfa. För att V och W skall kunna vara isomorfa måste rummen ha samma dimension. Å andra sidan, om rummen har samma dimension och $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ är baser i V respektive W så får vi en isomorfism F mellan V och W genom att sätta

$$F(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$$

Två vektorrum V och W är alltså isomorfa om och endast om de har samma dimension.

- **Symmetriska linjära operatorer.** En linjär operator $F : V \to V$ på ett IP-rum V sägs vara symmetrisk om $\langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, F(\mathbf{v})\rangle$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. En enkel uträkning, som vi utelämnar, visar att F är symmetrisk om och endast om $[F]_{ee}$ är symmetrisk för varje ON-bas $\underline{e}$. Våra tidigare undersökningar visar då att F är en symmetrisk linjär operator om och endast om det finns en ortogonalbas av egenvektorer till F.

- **Exempel.** $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är en symmetrisk linjär operator som uppfyller $G(1,2,1)^t = (3,6,3)^t$, $G(1,0,-1)^t = (-4,0,4)^t$ och dessutom har egenvärdet 6. Bestäm G:s standardmatris A.

  Lösning. Sätt $\mathbf{b}_1 = (1,2,1)^t$ och $\mathbf{b}_2 = (1,0,-1)^t$. Det gäller då att $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$, $G(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{b}_1$ och $G(\mathbf{b}_2) = -4\mathbf{b}_2$. Det återstår att finna en egenvektor $\mathbf{b}_3 = (a,b,c)^t$, till egenvärdet 6, som är vinkelrät mot både $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$. Det ger oss ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = a + 2b + c \\ 0 &= \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = a - c \end{aligned}$$

  som har lösningarna $a = -b = c$, där c är godtyckligt. Vi väljer $c = 1$ och får $\mathbf{b}_3 = (1,-1,1)^t$. För $\mathbf{b}_3$ ska gälla att $G(\mathbf{b}_3) = 6\mathbf{b}_3$. Låt

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

  Vi har då

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^t/6 \\ \mathbf{b}_2^t/2 \\ \mathbf{b}_3^t/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^t \\ 3\mathbf{b}_2^t \\ 2\mathbf{b}_3^t \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  och

$$A = BDB^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 6 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -2 & 8 & -2 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  □

- **Isometriska avbildningar.** Låt V, W vara två IP-rum av samma dimension. Den linjära avbildningen $F : V \to W$ sägs vara en isometri om $\langle F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v})\rangle_W = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Med hjälp av identiteten

$$4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

  visar man att F är isometrisk om och endast om $\|F(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ för alla $\mathbf{u} \in V$. Dessutom gäller att F är isometrisk om och endast om $[F]_{fe}$ är en ortogonalmatris närhelst $\underline{e}$ och $\underline{f}$ är ON-baser i V respektive W.