Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Kryssproblem (redovisningsuppgifter).

Till var och en av de tio lektionerna hör två problem som du ska försöka lösa.

I kursplaneringen, filen kurspht11.pdf på kurshemsidan, beskrivs mer utförligt hur systemet med redovisningsuppgifter fungerar. Här påpekar vi bara följande:

Om du kryssat minst 50%, respektive minst 80%, av redovisningsuppgifterna får du 1, respektive 2, bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Betyget du får på kursen kommer bara att bero på hur du lyckas på sluttentan. Betygen du får (eller ger) under lektionerna kommer inte att vägas in på något sätt. Givetvis kommer din aktivitet (eller brist på aktivitet) under lektionerna att i hög grad påverka ditt kursbetyg. Har du två bonuspoäng ligger du mycket bra till!

Bonuspoängen adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen i oktober 2011 **men ej vid något annat tentamenstillfälle**.

Uppgifter till lektion 1:

Dessa båda problem kan förekomma på en tenta i linjär algebra och geometri 1, så det är fråga om en repetition.

1. Π är planet $x - y + z = 2$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, -2, 1)$, $B = (4, 2, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a \\ -a-1 \\ -9a-5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm pivotkolonnerna i A och skriv övriga kolonner i A som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

(b) Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

(c) Avgör för vilka värden på a som ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och lös systemet i sådana fall. Skriv, när så är möjligt, $\mathbf{b}$ som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A.

Uppgifter till lektion 2:

1. Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Visa att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ är baser i $\mathbb{R}^3$.
- För vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Bestäm koordinaterna för vektorn

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} - 2\,\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

  med avseende på (a) standardbasen (b) basen $\underline{b}$ och (c) basen $\underline{c}$.

2. (a) Polynomen

$$-1 + t + 2t^2 - t^3, \qquad -3 + 2t + 2t^2 - t^3, \qquad -7 + 4t + 2t^2 - t^3,$$

$$10 - 7t - 10t^2 + 5t^3 \qquad \text{och} \qquad -26 + 19t + 28t^2 - 14t^3$$

spänner upp ett delrum W till $\mathcal{P}_3$. Bestäm en bas i W bestående av ett antal av de ovan givna polynomen. Utvidga, med användande av polynom från standardbasen $(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$, basen i W till en bas i $\mathcal{P}_3$.

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -7 & 10 & -26 \\ 1 & 2 & 4 & -7 & 19 \\ 2 & 2 & 2 & -10 & 28 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i A:s rad- och nollrum. Utvidga, på valfritt sätt, basen i radrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i nollrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$.

Uppgifter till lektion 3:

1. Två delrum, M och N, till $\mathbb{R}^4$ definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

och

$$N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Bestäm en bas i skärningsrummet $M \cap N$.

2. Två delrum, M och N, till $\mathbb{R}^4$ definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{och} \quad N = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Visa att $M \cap N = \{\vec{0}\}$. Låt $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^t$ och bestäm alla vektorer $\mathbf{u} \in M$, $\mathbf{v} \in N$ sådana att $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Uppgifter till lektion 4:

1. Delrummet M till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Bestäm ON-baser i M och $M^\perp$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 0)^t$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^\perp$. Bestäm även avstånden från $\mathbf{w}$ till M och från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$.

2. Bestäm, med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet för den inre produkten

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

maximum och minimum av

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad \text{då} \quad x_1^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 = 1.$$

Uppgifter till lektion 5:

1. Bestäm en ON-bas i delrummet M till $\mathbb{E}^4$, som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn även projektionen av vektorn $\mathbf{w} = (-4, -3, 2, -1)^t$ på M och avståndet från $\mathbf{w}$ till M.

2. Låt $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Bestäm standardmatriserna för de ortogonala projektionerna på M och $M^\perp$ samt de ortogonala speglingarna i M och $M^\perp$. Svaret på uppgiften ska alltså bestå av fyra matriser.

Uppgifter till lektion 6:

1. Visa att den linjära avbildningen $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{R}^3$, med standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & -5 \\ -7 & 17 & -10 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar. Bestäm en bas i varje egenrum, en inverterbar matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal, $P_1 + P_2 + P_3 = I$ (enhetsmatrisen), $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$ och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O \qquad \text{(nollmatrisen).}$$

Beräkna även A^n för varje positivt heltal n.

2. Visa att den linjära operatorn $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{E}^3$, med standardmatrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar. Bestäm en ortogonalbas i varje egenrum, en matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal,

$$P_1 + P_2 + P_3 = I,\ P_1^2 = P_1 = P_1^t,\ P_2^2 = P_2 = P_2^t,\ P_3^2 = P_3 = P_3^t$$

och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O.$$

Beräkna även A^n för varje heltal n.

Uppgifter till lektion 7:

1. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ (rummet av symmetriska 2×2-matriser) ges av

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (1-a)x_1 + (2a-3)x_2 + (-a+3)x_3 & (1-2a)x_1 + (4a-2)x_2 + (-2a+2)x_3 \\ (1-2a)x_1 + (4a-2)x_2 + (-2a+2)x_3 & (1-2a)x_1 + (4a-3)x_2 + (-2a+3)x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{där} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$, för vilka F är diagonaliserbar, och bestäm, i förekommande fall, en bas i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ bestående av egenvektorer till F.

2. Antag att V, W är vektorrum och att $\underline{e}$ är en bas i V, medan $\underline{f}$ är en bas W. För den linjära avbildningen $F : V \to W$ gäller att

$$[F]_{fe} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Finn baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, sådana att $[F]_{cb}$ har formen

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I är en enhetsmatris och O:na betecknar nollmatriser.

Uppgifter till lektion 8:

1. Lös systemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ har standardmatrisen

$$[F] = \begin{pmatrix} 1-a & 2a-1 & 2-a \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a \end{pmatrix}$$

För vilka värden på konstanten a har nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ någon gemensam vektor som inte är nollvektorn? Ange en sådan vektor i alla förekommande fall.

Uppgifter till lektion 9:

1. För vilka värden på konstanterna a och b är den kvadratiska formen $h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1+b \end{pmatrix},$$

positivt definit?

2. Bestäm, för alla värden på konstanten a, typen av ytan

$$-2x^2 + 4xy + 2xz + y^2 + 4yz - 2z^2 = a$$

samt (minsta) avståndet från ytan till origo. Avgör även för vilka a ytan är en rotationsyta och bestäm i sådana fall rotationsaxelns riktning.

Uppgifter till lektion 10:

1. I $\mathbb{R}^2$ införs skalärprodukten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}^t$ är transponatet av $\mathbf{x}$) där

$$G = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med avseende på denna skalärprodukt.

(b) Bestäm en matris B sådan att $B^t B = G$.

(c) Bestäm en matris C sådan att $C^2 = G$.

Se lösningen till problem 8 på tentan från 2009-10-23.

2. Kan en matris P av formen

$$P = k \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & a & b \\ 1 & c & d \end{pmatrix}$$

där a, b, c, d, k är reella tal, vara standardmatrisen för den ortogonala projektionen på ett tvådimensionellt delrum till $\mathbb{E}^3$?

Se sidan 20, formeln (∗∗), i filen repla1.pdf, som du hittar på kurshemsidan.