Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Svar (lösningar) till kryssproblemen (redovisningsuppgifterna).

Uppgifter till lektion 1:

Dessa båda problem kan förekomma på en tenta i linjär algebra och geometri 1, så det är fråga om en repetition.

1. Π är planet $x - y + z = 2$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, -2, 1)$, $B = (4, 2, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π.

Lösning. Planets normal är $\mathbf{n} = (1, -1, 1)^t$ och $\mathbf{w} = (4 - 1, 2 + 2, 0 - 1)^t = (3, 4, -1)^t$. Vektorn $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$, alltså:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = \frac{-2}{3}\,\mathbf{n} = \frac{1}{3}\,(-2, 2, -2)^t$$

Av detta följer

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \frac{1}{3}\,(9, 12, -3)^t + \frac{1}{3}\,(2, -2, 2)^t = \frac{1}{3}\,(11, 10, -1)^t$$

□

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a \\ -a-1 \\ -9a-5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm pivotkolonnerna i A och skriv övriga kolonner i A som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

(b) Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

(c) Avgör för vilka värden på a som ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart och lös systemet i sådana fall. Skriv, när så är möjligt, $\mathbf{b}$ som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A.

Lösning. (a) Med några radoperationer får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av C framgår att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_4$. Eftersom

$$\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 \quad \text{och} \quad \mathbf{c}_5 = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_4$$

gäller

$$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 \quad \text{och} \quad \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4$$

(b) För det homogena systemet gäller att $(A \mid \vec{0}) \sim (C \mid \vec{0})$. Av $(C \mid \vec{0})$ ser vi att lösningarna till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges av

$$x_1 = -2x_3 + x_5, \quad x_2 = 3x_3 - x_5, \quad x_4 = -2x_5 \quad \text{där} \quad x_3, x_5 \quad \text{är godtyckliga.}$$

Alltså har systemet lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 + x_5 \\ 3x_3 - x_5 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om och endast om systemet $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b})$ är lösbart. Några radoperationer ger

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & a+3 \\ 0 & 1 & 2 & a+5 \\ 0 & 0 & -5 & 2a-6 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Av den sista raden i denna trappmatris ser vi att $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b})$ är lösbart om och endast om $a = -2$. Vi sätter in detta värde på a och får

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ges därför av

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 0.$$

Den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas som summan av denna lösning och den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \vec{0}$, alltså

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Uppgifter till lektion 2:

1. Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Visa att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ är baser i $\mathbb{R}^3$.
- För vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Bestäm koordinaterna för vektorn

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} - 2\,\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

  med avseende på (a) standardbasen (b) basen $\underline{b}$ och (c) basen $\underline{c}$.

Lösning. Vi har

$$\mathbf{v} = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{w} = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

För att få reda på $\mathbf{r}_b$ och $\mathbf{r}_c$ löser vi de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{r}) \qquad \text{och} \qquad (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \mid \mathbf{r}) :$$

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{r}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \mid \mathbf{r}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Det framgår att

$$\mathbf{r}_b = \begin{pmatrix} -26 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{r}_c = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Dessutom gäller förstås att $\mathbf{r}_e = \mathbf{r} = (-5, 2, 5)^t$. $\square$

2. (a) Polynomen

$$-1+t+2t^2-t^3, \qquad -3+2t+2t^2-t^3, \qquad -7+4t+2t^2-t^3,$$
$$10-7t-10t^2+5t^3 \qquad \text{och} \qquad -26+19t+28t^2-14t^3$$

spänner upp ett delrum W till $\mathcal{P}_3$. Bestäm en bas i W bestående av ett antal av de ovan givna polynomen. Utvidga, med användande av polynom från standardbasen $(1,\ t,\ t^2,\ t^3)$, basen i W till en bas i $\mathcal{P}_3$.

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -7 & 10 & -26 \\ 1 & 2 & 4 & -7 & 19 \\ 2 & 2 & 2 & -10 & 28 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i A:s rad- och nollrum. Utvidga, på valfritt sätt, basen i radrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$. Utvidga, på valfritt sätt, basen i nollrummet till en bas i $\mathbb{R}^5$.

Lösning. Vi ser att kolonnerna i A är standardkoordinaterna för de givna polynomen, så vi väljer att lösa (b) före (a):

(b) Några radoperationer ger

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De tre nollskilda raderna, $((1,0,-2,0,3),\ (0,1,3,0,1),\ (0,0,0,1,-2))$, i C, bildar en bas i A:s radrum. Eftersom första-, andra- och fjärde kolonnen i C är pivotkolonner kan vi komplettera med $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0,0)$ och $\mathbf{e}_5 = (0,0,0,0,1)$, till en bas i $\mathbb{R}^5$. Av C ser vi också genast att lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ ges av $x_1 = 2x_3 - 3x_5$, $x_2 = -3x_3 - x_5$, $x_4 = 2x_5$, där $x_3,\ x_5$ kan anta godtyckliga värden. Genom att sätta $x_3 = 1$, $x_5 = 0$ respektive $x_3 = 0$, $x_5 = 1$ ser vi att en bas i nollrummet ges av $((2,-3,1,0,0)^t,\ (-3,-1,0,2,1)^t)$. Dessutom ser vi att dessa båda vektorer kan kompletteras med $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0,0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0,0)^t$ och $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1,0)^t$, till en bas i $\mathbb{R}^5$.

(a) Att första-, andra- och fjärde kolonnen i C är pivotkolonner innebär att polynomen

$$-1+t+2t^2-t^3, \qquad -3+2t+2t^2-t^3, \qquad 10-7t-10t^2+5t^3$$

svarande mot första-, andra- respektive fjärde kolonnen $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4)$ i A, bildar en bas i W. För att se vilken av standardbas-vektorerna $1,\ t,\ t^2,\ t^3$, som vi kan komplettera med, till en bas i $\mathcal{P}_3$, gör vi radoperationer på matrisen $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid I_4)$ och får därvid

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4 \mid I_4) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår det att vi kan komplettera med endera t^2 eller t^3 till en bas i $\mathcal{P}_3$. Däremot duger vare sig 1 eller t till en sådan komplettering.

□

Uppgifter till lektion 3:

1. Två delrum, M och N, till $\mathbb{R}^4$ definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

och

$$N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Bestäm en bas i skärningsrummet $M \cap N$.

Lösning. Varje vektor $\mathbf{x} \in M$ kan skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 + t_3 \\ 3t_1 + t_2 + 2t_3 \\ -6t_1 - t_2 - 5t_3 \\ 7t_1 + t_2 + 5t_3 \end{pmatrix}$$

För att $\mathbf{x} \in M \cap N$ skall dessutom

$$\begin{aligned} 0 = x_1 - 2x_2 - x_3 &= (2t_1 + t_3) - 2(3t_1 + t_2 + 2t_3) - (-6t_1 - t_2 - 5t_3) \\ &= 2t_1 - t_2 + 2t_3 \end{aligned}$$

alltså $t_2 = 2t_1 + 2t_3$. Vektorerna $\mathbf{x} \in M \cap N$ ges därför av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t_1 + t_3 \\ 3t_1 + (2t_1 + 2t_3) + 2t_3 \\ -6t_1 - (2t_1 + 2t_3) - 5t_3 \\ 7t_1 + (2t_1 + 2t_3) + 5t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 + t_3 \\ 5t_1 + 4t_3 \\ -8t_1 - 7t_3 \\ 9t_1 + 7t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

En bas i $M \cap N$ är alltså

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

□

2. Två delrum, M och N, till $\mathbb{R}^4$ definieras genom

$$M = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{och} \quad N = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Visa att $M \cap N = \{\vec{0}\}$. Låt $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^t$ och bestäm alla vektorer $\mathbf{u} \in M$, $\mathbf{v} \in N$ sådana att $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Lösning. Låt

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har då $M = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ och $N = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$. Nästa steg är att lösa ekvationssystemet vars matrisform är $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \mid \mathbf{w})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Eftersom koefficientmatrisen är radekvivalent med enhetsmatrisen så är $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ en bas i $\mathbb{R}^4$ och ekvationssystemet har den unika lösningen $(4, -1, 1, -3)^t$. Sätter vi nu

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

så gäller $\mathbf{u} \in M$, $\mathbf{v} \in N$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ och det finns inget annat sätt att skriva $\mathbf{w}$ som en summa av en vektor i M och en vektor i N. $\square$

Uppgifter till lektion 4:

1. Delrummet M till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Bestäm ON-baser i M och $M^\perp$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 0)^t$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^\perp$. Bestäm även avstånden från $\mathbf{w}$ till M och från $\mathbf{w}$ till $M^\perp$.

Lösning. De båda ekvationerna som definierar M ger

$$x_3 = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad x_4 = -x_1 - x_2$$

M består därför av alla $\mathbf{x}$ sådana att

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2,$$

där x_1, x_2 är godtyckliga. En bas i M är alltså $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Gram-Schmidt ger oss en ortogonalbas $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ i M:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_1 - \frac{3}{3}\,\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De båda ekvationerna som definierar M visar också att $M^\perp$ spänns upp av

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En ortogonalbas $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ i $M^\perp$ fås genom

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\,\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_4 - \frac{3}{3}\,\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normering ger nu ON-basen $(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{b}_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{b}_2)$, i M, och ON-basen $(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{b}_3, \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{b}_4)$, i $M^\perp$.

Projektionerna av $\mathbf{w}$ på M och $M^\perp$ ges av

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}\,\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avstånden från $\mathbf{w}$ till M och $M^{\perp}$ ges av

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{respektive} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

□

2. Bestäm, med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet för den inre produkten

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

maximum och minimum av

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad \text{då} \quad x_1^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 = 1.$$

Lösning. Första uppgiften är att finna en vektor $\mathbf{a}$ sådan att

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + (a_2 - a_3)(x_2 - x_3) \\ &= a_1 x_1 + (2a_2 - a_3) x_2 + (a_3 - a_2)\, x_3 \end{aligned}$$

Vi ser att $a_1 = 2$, $2a_2 - a_3 = 3$ och $a_3 - a_2 = -2$, vilket ger oss $\mathbf{a} = (2, 1, -1)^t$. Normen av $\mathbf{a}$ ges av

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + (a_2 - a_3)^2 = 4 + 1 + 4 = 9,$$

alltså $\|\mathbf{a}\| = 3$. Av Cauchy-Schwarz olikhet

$$-3 = -\|\mathbf{a}\| = -\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\| \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\| = 3$$

följer att maximum av $2x_1 + 3x_2 - 2x_3$ är 3 (maximum antas då $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\,\mathbf{a}$) medan minimum av $2x_1 + 3x_2 - 2x_3$ är -3 (minimum antas då $\mathbf{x} = -\frac{1}{3}\,\mathbf{a}$). □

Uppgifter till lektion 5:

1. Bestäm en ON-bas i delrummet M till $\mathbb{E}^4$, som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn även projektionen av vektorn $\mathbf{w} = (-4, -3, 2, -1)^t$ på M och avståndet från $\mathbf{w}$ till M.

Lösning. $M^\perp$ består av lösningarna $\mathbf{x}$ till det homogena systemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

alltså av alla $\mathbf{x} = (2x_4, x_4, -x_4, x_4)^t = x_4(2, 1, -1, 1)^t$, där $x_4 \in \mathbb{R}$. Det betyder att $M^\perp$ är endimensionellt, med basen $(\mathbf{b}_4) = ((2, 1, -1, 1)^t)$. M, som är lika med ortogonala komplementet till $M^\perp$, består av alla $\mathbf{x}$ som är vinkelräta mot $\mathbf{b}_4$, alltså som uppfyller ekvationen

$$0 = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad (*)$$

Två vektorer som uppfyller ekvationen och dessutom är vinkelräta mot varandra är $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 0, 0)^t$ och $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, 1)^t$. En vektor som är vinkelrät mot $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ måste ha formen $\mathbf{b}_3 = (2r, r, s, -s)^t$, där r, s är godtyckliga reella tal. Om $\mathbf{b}_3$ dessutom ska ligga i M måste koordinaterna uppfylla $(*)$, alltså

$$0 = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4r + r - s - s = 5r - 2s.$$

Väljer vi $r = 2$, $s = 5$ får vi $\mathbf{b}_3 = (4, 2, 5, -5)^t$. Genom att normera ortogonalbasen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ fås ON-basen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

i M. Vi kan skriva $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ på M och $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{w}$ på $M^\perp$. Alltså har vi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{b}_4} \mathbf{b}_4 = \frac{-14}{7} \mathbf{b}_4 = -2\,\mathbf{b}_4$$

och

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + 2\,\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avståndet från $\mathbf{w}$ till M är lika med $\|\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{b}_4\| = 2\sqrt{7}$. $\square$

2. Låt $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Bestäm standardmatriserna för de ortogonala projektionerna på M och $M^\perp$ samt de ortogonala speglingarna i M och $M^\perp$. Svaret på uppgiften ska alltså bestå av fyra matriser.

Lösning. Låt P och Q beteckna standardmatriserna för de ortogonala projektionerna på M respektive $M^\perp$ och låt R och S beteckna standardmatriserna för de ortogonala speglingarna i M respektive $M^\perp$. Mellan dessa fyra matriser råder sambanden

$$P + Q = I, \quad R = 2P - I = I - 2Q, \quad S = 2Q - I = I - 2P = -R$$

Så snart vi beräknat en av dem får vi lätt fram de övriga tre. Vi börjar med att beräkna Q: En normalvektor till M är $\mathbf{n} = (1,1,2)^t$. Då $(\mathbf{n})$ är en bas i $M^\perp$ får vi

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,1,2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

I tur och ordning får vi nu

$$P = I - Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R = I - 2Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = -R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Uppgifter till lektion 6:

1. Visa att den linjära avbildningen $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{R}^3$, med standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & -5 \\ -7 & 17 & -10 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar. Bestäm en bas i varje egenrum, en inverterbar matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal, $P_1 + P_2 + P_3 = I$ (enhetsmatrisen), $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$ och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O \qquad \text{(nollmatrisen).}$$

Beräkna även A^n för varje positivt heltal n.

Lösning. Egenvärdena för F ges av

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 8-\lambda & -5 \\ -7 & 17 & -10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 1 \\ -\lambda & 8-\lambda & -5 \\ -\lambda & 17 & -10-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 8-\lambda & -5 \\ 1 & 17 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 11-\lambda & -6 \\ 0 & 20 & -11-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & -6 \\ 20 & -11-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)[-(11-\lambda)(11+\lambda) + 120] \\
&= (-\lambda)[\lambda^2 - 1] = (0-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Vi har alltså $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

- Egenrummet till $\lambda_1 = 0$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -5 & 0 \\ -7 & 17 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x_1 = x_2 = x_3$. En bas i egenrummet $N(F)$ är $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)^t$.
- Egenrummet till $\lambda_2 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 \\ -7 & 17 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  med lösningen $x_1 = -4x_3$, $x_2 = -x_3$. En bas i egenrummet $N(F - I)$ är $\mathbf{b}_2 = (4,1,-1)^t$.

– Egenrummet till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & -5 & 0 \\ -7 & 17 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningen $3x_1 = x_3, 3x_2 = 2x_3$. En bas i egenrummet $N(F+I)$ är $\mathbf{b}_3 = (1,2,3)^t$.

De sökta matriserna ges av

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-5,\ 13,\ -7) = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -7 \\ -5 & 13 & -7 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ -2,\ 1) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2,\ -5,\ 3) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & -10 & 6 \\ 6 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

Att matriserna har de angivna egenskaperna följer av den allmänna teorin. Vi har även

$$A = P_2 - P_3 \quad \text{och} \quad A^n = P_2 + (-1)^n P_3 \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

□

2. Visa att den linjära operatorn $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, på $\mathbb{E}^3$, med standardmatrisen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar. Bestäm en ortogonalbas i varje egenrum, en matris B och en diagonalmatris D, sådana att $A = BDB^{-1}$. Visa att A kan skrivas som en summa

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är reella tal,

$$P_1 + P_2 + P_3 = I,\ P_1^2 = P_1 = P_1^t,\ P_2^2 = P_2 = P_2^t,\ P_3^2 = P_3 = P_3^t$$

och

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_3 = P_3P_1 = P_2P_3 = P_3P_2 = O.$$

Beräkna även A^n för varje heltal n.

Lösning. Egenvärdena till F ges av

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-2\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & 2 & -1 \\ 2-2\lambda & -2-2\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & 2 & 1-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= 4(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 4(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= 8(1-\lambda)^2(-2-\lambda)
\end{aligned}
$$

Alltså har vi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2$.

- Egenrummet $N(F-I)$ till $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet
$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Den högra matrisen svarar mot ekvationen $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Två vektorer som uppfyller ekvationen och dessutom är vinkelräta mot varandra är $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -1)^t$ och $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1)^t$. En ortogonalbas i egenrummet är därför $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. En ON-bas i egenrummet är $(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_2)$
- Vektorerna i egenrummet $N(F+2I)$, till $\lambda_3 = -2$, är vinkelräta mot $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ och därför parallella med $\mathbf{b}_3 = (1, -2, 1)^t$ (normalen till planet $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$). En bas i egenrummet är alltså $(\mathbf{b}_3)$ och en ortogonalbas i $\mathbb{E}^3$, bestående av egenvektorer till F, är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

De sökta matriserna ges av

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^t/2 \\ \mathbf{b}_2^t/3 \\ \mathbf{b}_3^t/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

D är diagonalmatrisen med $1,\ 1,\ -2$ i diagonalen,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1,\ 0,\ -1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_2 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
P_3 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,\ -2,\ 1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Att matriserna har de angivna egenskaperna följer av den allmänna teorin. Vi har även

$$A = P_1 + P_2 - 2P_3 \quad \text{och} \quad A^n = P_1 + P_2 + (-2)^n P_3 \quad \text{för} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

□

Uppgifter till lektion 7:

1. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ (rummet av symmetriska 2×2-matriser) ges av

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (1-a)x_1 + (2a-3)x_2 + (-a+3)x_3 & (1-2a)x_1 + (4a-2)x_2 + (-2a+2)x_3 \\ (1-2a)x_1 + (4a-2)x_2 + (-2a+2)x_3 & (1-2a)x_1 + (4a-3)x_2 + (-2a+3)x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{där} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$, för vilka F är diagonaliserbar, och bestäm, i förekommande fall, en bas i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. Standardbasen i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ är

$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Enligt ovan gäller därför att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x})_e &= \begin{pmatrix} (1-a)x_1 + (2a-3)x_2 + (-a+3)x_3 \\ (1-2a)x_1 + (4a-3)x_2 + (-2a+3)x_3 \\ (1-2a)x_1 + (4a-2)x_2 + (-2a+2)x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-a & 2a-3 & -a+3 \\ 1-2a & 4a-3 & -2a+3 \\ 1-2a & 4a-2 & -2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= [F]_{ee}\mathbf{x}_e = A\mathbf{x}_e \end{aligned}$$

Egenvärdena till F ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-a-\lambda & 2a-3 & -a+3 \\ 1-2a & 4a-3-\lambda & -2a+3 \\ 1-2a & 4a-2 & -2a+2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2a-3 & -a+3 \\ 1-\lambda & 4a-3-\lambda & -2a+3 \\ 1-\lambda & 4a-2 & -2a+2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2a-3 & -a+3 \\ 1 & 4a-3-\lambda & -2a+3 \\ 1 & 4a-2 & -2a+2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2a-3 & -a+3 \\ 0 & 2a-\lambda & -a \\ 0 & 2a+1 & -a-1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \left\{ \begin{vmatrix} 2a-\lambda & -a \\ 2a+1 & -a-1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a-\lambda & -a \\ 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2a-\lambda & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right. \\ &= \left. (-1-\lambda)(a-\lambda) \right\} = (1-\lambda)(a-\lambda)(-1-\lambda). \end{aligned}$$

Det framgår att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -1$.

- Egenrummet till $\lambda_1 = 1$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -a & 2a-3 & -a+3 & 0 \\ 1-2a & 4a-4 & -2a+3 & 0 \\ 1-2a & 4a-2 & -2a+1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $x_1 - x_3 = 0$ och $x_2 - x_3 = 0$. Egenrummet $N(F - I)$ består därför av alla $\mathbf{x} = x_3\mathbf{e}_1 + x_3\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, där x_3 är godtyckligt. En bas i egenrummet är, till exempel, $(\mathbf{b}_1) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

– Egenrummet till $\lambda_2 = a$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A - aI|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2a & 2a-3 & -a+3 & 0 \\ 1-2a & 3a-3 & -2a+3 & 0 \\ 1-2a & 4a-2 & -3a+2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $(1-2a)x_1 + ax_3 = 0$ och $x_2 - x_3 = 0$. En vektor som uppfyller ekvationerna är $\mathbf{b}_2 = a\mathbf{e}_1 + (2a-1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Observera att $\mathbf{b}_2 \neq \vec{0}$ för alla värden på a. Egenrummet $N(F - aI)$ har dimension ett så $(\mathbf{b}_2)$ är en bas i egenrummet.

– Egenrummet till $\lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna systemet

$$(A + I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & 2a-3 & -a+3 & 0 \\ 1-2a & 4a-2 & -2a+3 & 0 \\ 1-2a & 4a-2 & -2a+3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3-2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den högra matrisen svarar mot ekvationerna $3x_1 = (3+2a)x_2$ och $3x_3 = (1-2a)x_2$, där $x_2 \neq 0$ kan väljas godtyckligt. Tar vi $x_2 = 3$ får vi egenvektorn $\mathbf{b}_3 = (3+2a)\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + (1-2a)\mathbf{e}_3$ och $(\mathbf{b}_3)$ är en bas i det endimensionella egenrummet $N(F+I)$.

Om $a \neq \pm 1$ så är egenvärdena distinkta, vilket, enligt sats, medför att $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är linjärt oberoende. I dessa fall är alltså $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ en bas i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$, bestående av egenvektorer till F, vilket innebär att F är diagonaliserbar.

Om $a = \pm 1$ så har ett av egenvärdena algebraisk multiplicitet två. I ovanstående egenvektorsberäkning fick vi dock resultatet att för varje a har alla egenrummen dimension ett. Alltså har, för varje a, alla egenvärden geometrisk multiplicitet ett. Avbildningen är alltså inte diagonaliserbar i dessa båda fall. □

2. Antag att V, W är vektorrum och att $\underline{e}$ är en bas i V, medan $\underline{f}$ är en bas W. För den linjära avbildningen $F : V \to W$ gäller att

$$[F]_{fe} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Finn baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, sådana att $[F]_{cb}$ har formen

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

där I är en enhetsmatris och O:na betecknar nollmatriser.

Lösning. Låt oss, innan vi löser problemet, betrakta följande situation: För den linjära avbildningen $F : V \to W$ gäller att $(F(\mathbf{b}_1), F(\mathbf{b}_2), F(\mathbf{b}_3))$ är en bas i $V(F)$ och $(\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ är en bas i $N(F)$. Enligt dimensionssatsen har vi

$$\dim(V) = \dim(V(F)) + \dim(N(F)) = 3 + 3 = 6.$$

Vi visar nu att vektorerna $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_6$ är linjärt oberoende: Antag att

$$\vec{0} = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + t_3\mathbf{b}_3 + t_4\mathbf{b}_4 + t_5\mathbf{b}_5 + t_6\mathbf{b}_6 \qquad (*)$$

Då gäller

$$\begin{aligned}\vec{0} = F(\vec{0}) &= t_1F(\mathbf{b}_1) + t_2F(\mathbf{b}_2) + t_3F(\mathbf{b}_3) + t_4F(\mathbf{b}_4) + t_5F(\mathbf{b}_5) + t_6F(\mathbf{b}_6)\\ &= t_1F(\mathbf{b}_1) + t_2F(\mathbf{b}_2) + t_3F(\mathbf{b}_3)\end{aligned}$$

Eftersom $F(\mathbf{b}_1), F(\mathbf{b}_2), F(\mathbf{b}_3)$ är linjärt oberoende följer att $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Sätter vi in detta i $(*)$ så får vi

$$\vec{0} = t_4\mathbf{b}_4 + t_5\mathbf{b}_5 + t_6\mathbf{b}_6$$

Då även $\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6$ är linjärt oberoende måste $t_4 = t_5 = t_6 = 0$. Sex linjärt oberoende vektorer i ett sexdimensionellt rum är automatiskt en bas i rummet. Alltså är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ en bas i V. För rummet W kan vi bara säga att det har dimension minst tre och att $\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{b}_1), \mathbf{c}_2 = F(\mathbf{b}_2), \mathbf{c}_3 = F(\mathbf{b}_3)$ är tre linjärt oberoende vektorer. Om vi, till exempel, antar att W har dimension fyra och vi låter $\mathbf{c}_4$ vara en godtycklig vektor i W, som **inte** ligger i $V(F)$, så är $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$ en bas i W. Matrisen för F, med avseende på baserna $\underline{b}$ och $\underline{c}$ är då

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu löser vi problemet: Sätt $A = [F]_{fe} = (\vec{0}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)$. Genom ett antal radoperationer får vi

$$A \sim R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{0}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)$$

Vi ser att $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_6$ är pivotkolonner i R och att $\mathbf{r}_4 = 2\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_5 = \mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3$. Detta medför att $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6)$ är en bas i A:s kolonnrum (och att $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$). Att $A = [F]_{fe}$ innebär, bland annat, att

$$F(\mathbf{e}_2)_f = \mathbf{a}_2, \quad F(\mathbf{e}_3)_f = \mathbf{a}_3 \quad \text{och} \quad F(\mathbf{e}_6)_f = \mathbf{a}_6$$

och att (just på grund av att $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6)$ är en bas i A:s kolonnrum) $(F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_6))$ är en bas i $V(F)$.

Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $R\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar. Av R framgår direkt att dessa lösningar är

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ -2x_4 - x_5\\ x_4 - 3x_5\\ x_4\\ x_5\\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -3\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$$

Av lösningarna framgår att $(\mathbf{e}_1, -2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5)$ är en bas i $N(F)$.

Vi sätter nu $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_6$, $\mathbf{b}_4 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}_5 = -2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{b}_6 = -\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$, $\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{b}_1)$, $\mathbf{c}_2 = F(\mathbf{b}_2)$, $\mathbf{c}_3 = F(\mathbf{b}_3)$ och låter $\mathbf{c}_4$ vara en godtycklig vektor i W, som inte ligger i $V(F)$. Då är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_6)$, $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_4)$ baser i V respektive W och

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det återstår att avgöra vilka val av $\mathbf{c}_4$ som är möjliga. Vi har $\mathbf{c}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3 + 4\mathbf{f}_4$, $\mathbf{c}_3 = 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_4$. Vektorn $\mathbf{c}_4 = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 + \delta\mathbf{f}_4$ ligger därför **inte** i $V(F)$ om och endast om

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 2 & \beta \\ 1 & 3 & 0 & \gamma \\ 1 & 4 & 1 & \delta \end{vmatrix} = -3\alpha + 5\beta - \gamma - \delta$$

Exempelvis kan vi som $\mathbf{c}_4$ välja vilken som helst av vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$. $\square$

Uppgifter till lektion 8:

1. Lös systemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösning. Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (-1-\lambda)^2(8-\lambda) \end{aligned}$$

Alltså har vi $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$. Egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Två linjärt oberoende (ortogonala) egenvektorer är $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -1)^t$ och $\mathbf{b}_2 = (1, -4, 1)^t$ Då matrisen är symmetrisk gäller att egenvektorerna till $\lambda_3 = 8$ är vinkelräta mot $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och därför parallella med $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)^t$. För matrisen

$$B = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{med inversen} \quad B^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

gäller då att $B^{-1}AB = D$, där D är diagonalmatrisen med egenvärdena -1, -1, 8 i diagonalen. Genom transformationen $\mathbf{y}(t) = B\mathbf{z}(t)$ fås systemet $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t)$, d.v.s. $z_1'(t) = -z_1(t), z_2'(t) = -z_2(t), z_3'(t) = 8z_2(t)$, med lösningen $z_1(t) = c_1e^{-t}, z_2(t) = c_2e^{-t}$, $z_3(t) = c_3e^{8t}$. Här gäller att

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{z}(0) = B^{-1}\mathbf{y}(0) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket slutligen ger oss lösningen

$$\mathbf{y}(t) = B\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + 2e^{8t} \\ e^{8t} \\ e^{-t} + 2e^{8t} \end{pmatrix}$$

□

2. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ har standardmatrisen

$$A = [F] = \begin{pmatrix} 1-a & 2a-1 & 2-a \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a \end{pmatrix}$$

För vilka värden på konstanten a har nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ någon gemensam vektor som inte är nollvektorn? Ange en sådan vektor i alla förekommande fall.

Lösning. Nollrummet $N(F)$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 2a-1 & 2-a & 0 \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a & 0 \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2a+5 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösningarna $3x_1 = (2a+5)x_2$, $3x_3 = -(2a+1)x_2$, där x_2 kan väljas godtyckligt. Vi väljer $x_2 = 3$, vilket ger vektorn $\mathbf{b}_1$ med standardkoordinaterna $2a+5,\ 3,\ -2a-1$, alltså $\mathbf{b}_1 = 2a+5+3t-(2a+1)t^2$. $N(F)$ och $V(F)$ har därför en gemensam vektor, som inte är nollvektorn, om och endast om det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 2a-1 & 2-a & 2a+5 \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a & 3 \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a & -2a-1 \end{array}\right)$$

är lösbart. Subtraherar vi den andra raden från den tredje får vi systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 2a-1 & 2-a & 2a+5 \\ -1-2a & 4a+2 & 1-2a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-4 \end{array}\right)$$

Av den tredje raden framgår att systemet är olösbart om $a \neq -2$. Sätter vi in $a = -2$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att systemet är lösbart med lösningarna $x_2 = 3x_1 + 7$, $x_3 = 3x_1 + 9$, där x_1 kan väljas godtyckligt. Vi väljer att ta $x_1 = -3$, vilket ger vektorn $\mathbf{b}_2$ med koordinaterna $-3,\ -2,\ 0$ ($\mathbf{b}_2 = -3-2t$) och egenskapen att $F(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1$. Det betyder att $\vec{0} \neq \mathbf{b}_1 \in N(F) \cap V(F)$. $\square$

- **Anmärkning.** En avbildning F sådan att $N(F) \cap V(F) \neq \{\vec{0}\}$ kan inte vara diagonaliserbar. I ovanstående problem är $\mathbf{b}_3 = 1 + t + t^2$ en egenvektor till F ($F(\mathbf{b}_3) = 2\mathbf{b}_3$) och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ är en bas i $\mathcal{P}_2$. I basen $\underline{b}$ har F matrisen

$$[F]_b = [F]_{bb} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Av denna framgår att 0 är ett egenvärde med algebraisk multiplicitet två, men geometrisk multiplicitet ett.

Uppgifter till lektion 9:

1. För vilka värden på konstanterna a och b är den kvadratiska formen $h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1+b \end{pmatrix},$$

positivt definit?

Lösning. Hörndeterminanterna i A är

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1+b \end{vmatrix} = b - (a-1)^2$$

Alla tre är positiva för alla a, b sådana att $b > (a-1)^2$. Den kvadratiska formen $h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^t A\mathbf{r}$ är alltså positivt definit om och endast om $b > (a-1)^2$. □

2. Bestäm, för alla värden på konstanten a, typen av ytan

$$h(x, y, z) = -2x^2 + 4xy + 2xz + y^2 + 4yz - 2z^2 = a$$

samt (minsta) avståndet från ytan till origo. Avgör även för vilka a ytan är en rotationsyta och bestäm i sådana fall rotationsaxelns riktning.

Lösning. Den kvadratiska formen h har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3+\lambda & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3+\lambda & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)[8 + (1-\lambda)(1+\lambda)] = (3+\lambda)^2(3-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$.

- Egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Av den högra matrisen framgår att egenvektorerna uppfyller $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Två ortogonala egenvektorer är $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -1)^t$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, 1)^t$.

- Egenvektorerna till $\lambda_3 = 3$ är vinkelräta mot $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och därför parallella med $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 1)^t$ (som förstås också är en egenvektor).

I principalkoordinaterna har ytan ekvationen

$$-3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 = a \quad \text{som kan skrivas} \quad -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = \tfrac{a}{3}$$

Eftersom två egenvärden är lika är ytan alltid en rotationsyta, med rotationsaxeln parallell med $\mathbf{b}_3$. Då egenvärdena har samma absolutbelopp (nämligen 3) gäller alltid att avståndet till origo är $\sqrt{\frac{|a|}{3}}$. Vad gäller ytans typ har vi tre olika fall:

- Om $a > 0$ är ytan en tvåmantlad hyperboloid.
- Om $a = 0$ är ytan en kon.
- Om $a < 0$ är ytan en enmantlad hyperboloid.

□

- **Om hörndeterminanter.** Vi har i filen forel14-17.pdf, sidan 8 (se kurshemsidan), lagt in ett bevis av satsen att en symmetrisk matris är positivt definit om och endast om alla dess hörndeterminanter är positiva.

Uppgifter till lektion 10:

1. I $\mathbb{R}^2$ införs skalärprodukten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$, där

$$G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm det ortogonala komplementet till vektorn $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med avseende på denna skalärprodukt.

(b) Bestäm en matris B sådan att $B^t B = G$.

(c) Bestäm en matris C sådan att $C^2 = G$.

Lösning. Här är det effektivast att ta uppgifterna i omvänd ordning:

(c) Vi börjar med att diagonalisera G: Egenvärdena till G ges av

$$\begin{aligned} 0 &= 5^2 \det(G - \lambda I) = \det(5G - 5\lambda I) = \\ &= \begin{vmatrix} 17 - 5\lambda & -6 \\ -6 & 8 - 5\lambda \end{vmatrix} = \\ &= 25\lambda^2 - 5(17+8)\lambda + (8)(17) - (-6)(-6) = 25(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = \\ &= 25(\lambda - 1)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Egenrummet till $\lambda_1 = 1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

alltså $2x_1 - x_2 = 0$, t.ex. $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$.
Egenrummet till $\lambda_2 = 4$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

alltså $x_1 + 2x_2 = 0$, t.ex. $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$.
Av ovanstående följer att $G = PDP^{-1}$, där

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Låt nu Δ vara kvadratroten ur D, d.v.s

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då har vi $\Delta\,\Delta = \Delta^2 = D$. Sätter vi nu $C = P\Delta P^{-1}$, alltså

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = C^t,$$

så gäller därför

$$C^2 = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta\,\Delta P^{-1} = PDP^{-1} = G.$$

(b) Då C är symmetrisk kan vi ta $B = C$.

(a) Av (b) följer att den inre produkten ges av

$$5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 5C\mathbf{x} \cdot C\mathbf{y} = (9x_1 - 2x_2)(9y_1 - 2y_2) + (-2x_1 + 6x_2)(-2y_1 + 6y_2)$$

För $x \in e_1^{\perp}$ gäller ekvationen

$$0 = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = (9x_1 - 2x_2)(9) + (-2x_1 + 6x_2)(-2) = 5(17x_1 - 6x_2)$$

som har lösningarna $(x_1, x_2) = (6t, 17t)$. Ortogonala komplementet till e_1 består alltså av alla reella multipler av vektorn $(6, 17)$.

□

2. Kan en matris P av formen

$$P = k \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & e & f \\ 1 & g & h \end{pmatrix} \qquad (*)$$

där e, f, g, h, k är reella tal, vara standardmatrisen för den ortogonala projektionen på ett tvådimensionellt delrum till $\mathbb{E}^3$?

Lösning. För standardmatrisen P, för den ortogonala projektionen på planet $ax + by + cz = 0$, gäller

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Om P även ges av $(*)$ så följer att vektorerna $(b^2 + c^2, -ab, -ac)^t$ och $(1, -2, 1)^t$ är parallella. Detta ger oss likheterna

$$\frac{b^2 + c^2}{1} = \frac{-ab}{-2} = \frac{-ac}{1}$$

Den högra likheten ger $ab = -2ac$. Här måste $a \neq 0$, ty om $a = 0$ följer att $b^2 + c^2 = 0$, vilket ger $a = b = c = 0$, vilket är oförenligt med att a, b, c är koefficienter i ekvationen för ett plan. Alltså gäller $b = -2c$, vilket ger $5c^2 = 4c^2 + c^2 = -ac$, $a = -5c$. Enda möjligheten är alltså att P är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på planet $5x + 2y - z = 0$ ($a = 5$, $b = 2$, $c = -1$). Enligt $(**)$ gäller därför att

$$P = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 \\ -10 & 26 & 2 \\ 5 & 2 & 29 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & \frac{26}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

□