Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Linjär algebra II, 5 hp
ES, KandFy, Q, X
2011-08-29

Kursinformation.

Undervisning:
17 föreläsningar och 10 lektioner (om vardera 2×45 minuter). Under föreläsningarna går vi igenom teorin och demonstrerar hur den tillämpas på praktisk problemlösning.

Lektionerna ägnas åt redovisninguppgifterna (se nedan) samt, i mån av tid, ytterligare problemgenomgång.

Kurslitteratur:
H. Anton och C. Rorres: *Elementary Linear Algebra*, 10:e upplagan. Wiley 2011 (betecknas A nedan).

Innehåll:
Vi läser kapitel 4.1 – 4.8, 5.1 – 5.4, 6.1 – 6.3, 7.1 – 7.3, 8.1 – 8.5 i A. Närmare detaljer framgår av nedanstående *lektionsanvisningar*.

Examination:
Kursen avslutas med en skriftlig tentamen. Som betyg på kursen används beteckningarna U (underkänd), 3 (godkänd), 4 (icke utan beröm godkänd) och 5 (med beröm godkänd). Maxpoängen på tentan är 40. Betygskraven är; 18 (25, 32) poäng för betyg 3 (4, 5).

Kurshemsida:
`http://www2.math.uu.se/~styf/la2ht11`
Material som delas ut på föreläsningarna, och mer, kan återfinnas här. Besök sidan varje dag så att du inte missar något.

Lärare:
Cecilia Karlsson: `Cecilia.Karlsson@math.uu.se`. Lektioner för KandFy, Q2.
Jonathan Nilsson: `Jonathan.Nilsson@math.uu.se`. Lektioner för X2B.
Bo Styf: `styf@math.uu.se, 0707-253107`. Föreläsningar. Lektioner för ES3A.
Katja Trinajstic: `Katja.Trinajstic@math.uu.se`. Lektioner för ES3B, X2A.

Preliminär föreläsningsplan:

Föreläsning	Innehåll	Kapitel i A
1 - 4	Vektorrum, delrum, linjärt beroende, bas, dimension, basbyte, nollrum, rang.	4
5 - 8	Inre produkter, vinkel, ortogonalitet, ON-baser, Gram-Schmidt, ortogonala matriser.	6.1 - 6.3 7.1
9 - 10	Egenvärden, egenvektorer, diagonalisering, system av differentialekvationer, ON-diagonalisering.	5.1 - 5.3 5.4, 7.2
11 - 13	Allmänna linjära transformationer, kärna och rang, dimensionssatsen, isomorfier, sammansättningar, inversa transformationen, matriser för linjära transformationer, similaritet.	8.1 8.2 8.3 8.4 8.5
14 - 15	Kvadratiska former, kägelsnitt och andragradsytor.	7.3
16 - 17	Ägnas åt tentamensförberedelser.	4–8

Lektioner med kryssproblem (redovisningsuppgifter):
Till var och en av de tio lektionerna hör två problem som du skall försöka lösa.

När du kommer till lektionen skall du, på en krysslista som tillhandahålls av läraren, kryssa i de problem som du, helt eller delvis, har lyckats lösa. Lösningarna skall sedan redovisas och betygsättas på lektionen enligt följande:

Klassen kommer, på lämpligt sätt, att indelas i grupper om två personer. Dessa grupper kommer att vara intakta under hela kursen. Om, till exempel, klassen består av 30 studenter så får vi femton grupper; A B C D E F G H I K L M N P Q.

Innan lektionens början lottar läraren ut åtta av dessa grupper, säg A C E F G H K N. Dessa grupper skall presentera lösningar på kryssproblemen. Lösningarna, som skall presenteras både skriftligt och muntligt, skall granskas och betygssättas av de återstående grupperna, i detta fall alltså B D I L M P Q. Antag att en ytterligare lottning, som görs av läraren innan lektionsstart, utfaller så att A E F G H K N skall betygsättas av I L B Q M D respektive P. Gruppen C, som blev över, betygsätts av läraren, som betecknas med X.

Efter en omflyttning kommer vi då att ha åtta par av grupper A-I C-X E-L F-B G-Q H-M K-D och N-P, som förhoppningsvis kan genomföra redovisningen utan att störa varandra alltför mycket.

Hur redovisningen/betygsättningen i detalj skall gå till är något vi får diskutera. En modell kan vara:
Antag att A skall betygsättas av I. Medlemmarna, I1, och I2, av grupp I har på förhand delat upp problemen så att, säg, I1 betygsätter problem 2 och I2 betygsätter problem 1. I förväg har var och en av I1 och I2 (liksom A1 och A2) gjort betygsmallar för de problem man lyckats lösa. Om, till exempel, var och en av I1 och I2 lyckats lösa båda problemen har båda gruppmedlemmarna, vid lektionens början, två betygsmallar liggande framför sig (eller lagrad i minnet). Betyget (eller poängen) på en lösning är någon av siffrorna 0, 1, 2, 3, 4.

För att lektionerna ska kunna fungera effektivt måste du uppmärksamma följande:

- Gör, **innan lektionen**, en lättläst skriftlig lösning, på A4-ark, av varje problem som du, helt eller delvis, kan lösa (varje problem du tänker kryssa alltså). Använd inte rödpenna (men ta gärna med en rödpenna till lektionen)! Överst på **varje ark** skall din klass, lektionsnummer, problemnummer och grupptillhörighet, samt lösningssidan anges. Exempelvis:

X2A	Lektion 1	Problem 1	Trazan Apansson	A1 -	sid 2 av 2

  På lösningens första ark ska sidhuvudet vara (typ)

X2A	Lektion 1	Problem 1	Trazan Apansson	A1 -	sid 1 av 2
		Betyg			

  Här betyder A1 att Trazan Apansson är medlem nummer ett (av två) av grupp A. Efter A1 - har utrymme lämnats för att skriva in beteckningen på betygsättaren **om det blir så att Trazan Apansson ska redovisa sin lösning av problem 1**. Om så blir fallet och I2 (den andra medlemmen av grupp I) ska sätta betyg, så fyller I2 i detta så att sidhuvudet på första arket, till exempel, blir

X2A	Lektion 1	Problem 1	Trazan Apansson	A1 - I2	sid 1 av 2
		Betyg 4			

  Skriv bara på arkets ena sida. Lämna ordentligt med utrymme för kommentarer på varje sida. Börja nytt problem på nytt ark.

- Gör, **innan lektionen**, en betygsmall till varje problem som du, helt eller delvis, kan lösa. Annars kommer betygsättningen att ta för lång tid. Det är också mycket intressant att jämföra sin betygsmall med andras.

Givetvis kan man inte betygsätta ett problem som man inte, åtminstone delvis, lyckats lösa, så det kan uppkomma en del udda situationer, exempelvis att en student får betygsätta två problem eller att läraren får hoppa in.

Redovisningen, i vårt exempel, börjar med att I2 tittar på lösningarna till problem 1, som A1 och A2 gjort. Om A1, enligt I2, har en sämre lösning än A2 så ber I2 A1 att redovisa lösningen av problem 1.

A1 överlämnar sin skriftliga lösning till I2 och går sedan igenom lösningen muntligt. Under redovisningen noterar I2 (och även I1) lösningens förtjänster och brister och ställer frågor till A1 om något är oklart. I2 skriver, med rött, in kommentarer till lösningen.

När redovisningen är klar bestämmer I2 ett betyg som skrivs in i sidhuvudet på första arket av lösningen. I2 överlämnar sedan A1:s skriftliga, vid det här laget röd-kommenterade, lösning av problem 1, till läraren. De inlämnade papperen återlämnas när läraren har gått igenom dem.

Likadant gör man förstås med det andra problemet.

För att underlätta för läraren skall grupp I se till att sidhuvudet på första arket med lösningen ser ut ungeför som ovan. Läraren ska direkt i sidhuvudet se lektionsnumret (1, 2, 3, ...), gruppen (ES3A, X2B e.t.c), vem som redovisade (i detta fall A1), vem som betygsatte (i detta fall I2) och vilket betyg som satts (i detta fall 4). Det är inte nödvändigt att skriva in några namn, A1 respektive I2 räcker. Ett mer eller mindre optimalt sidhuvud på första arket är alltså

Hela redovisningen skall vara avklarad på maximalt en halvtimme. Det är mycket viktigt att vi har ordentligt med tid för frågor och problemdemonstration.

Om du kryssat minst 50%, respektive minst 80%, av redovisningsuppgifterna får du 1, respektive 2, bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Betyget du får på kursen kommer bara att bero på hur du lyckas på sluttentan. Betygen du får (eller ger) under lektionerna kommer inte att vägas in på något sätt. Givetvis kommer din aktivitet (eller brist på aktivitet) under lektionerna att i hög grad påverka ditt kursbetyg. Har du två bonuspoäng ligger du mycket bra till!

Bonuspoängen adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen i oktober 2011 **men ej vid något annat tentamenstillfälle**.

Lektionsanvisningar

Inför lektionerna 1 och 2

Till lektion nr 1 bör du **förbereda (dvs försöka lösa)** följande uppgifter:

avs.4.1, s.178-179: 1-3, 6, 10, 12, 15,

avs.4.2, s.188-189: 1-3, 6, 7, 9-12, 15,

avs.4.3, s.199: 1, 3, 4, 9,

avs.4.4, s.207-208: 1-5, 9-11,

avs.4.5, s.216-217: 1-3, 5-9, 12.

Till lektion nr 2 bör du **förbereda (dvs försöka lösa)** följande uppgifter:

avs.4.6, s.222-223: 2-5,

avs.4.7, s.235-236: 5-8, 12,

avs.4.8, s.246: 2-3.

Extraövningar till lektionerna 1 och 2.

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 1, -1)$, $u_3 = (0, 3, 1, -3)$, $u_4 = (1, 2, 3, 1)$, $u_5 = (1, -1, 2, 4)$. För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (4, a + 3, 5, a - 4)$ delrummet M? Finn en bas i M *bland* de givna vektorerna $u_1, \ldots, u_5$. Bestäm även, för $a = 2$, koordinaterna för vektorn v i den bas du valde.

2. Visa att om M och N är delrum till ett vektorrum V så är även $M \cap N$ ett delrum till V. Två delrum till $\mathbb{R}^4$ är

$$M = \text{span}\{(1, 2, 0, -1), (-1, 1, 3, 2), (2, 7, 3, -1)\}$$

och

$$N = \text{span}\{(0, 1, 2, -3), (0, -2, -4, 6), (1, 3, -1, 6), (1, 5, 3, 0)\}$$

Bestäm en bas i $M \cap N$.

3. N är det delrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 1, 1)$ och $u_3 = (1, -1, 2, 1)$, d.v.s. $N = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

(a) Avgör om vektorerna $v = (0, -2, 2, -11)$ och $w = (2, 1, 2, 1)$ tillhör N.

(b) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $u = (2 - a, 1 - 2a, 2, 1)$ det linjära höljet N?

(c) Beskriv det linjära höljet N som en lösningsmängd till ett homogent linjärt ekvationssystem i 4 obekanta.

(**Obs:** om du föredrar det, kan du först lösa del (c) och därefter delarna (a) och (b) av uppgiften.)

4. För vilka värden på den reella konstanten b är vektorerna $v_1 = (1, 0, 1, -1)$ $v_2 = (2, 1, 1, 1)$ och $v_3 = (1, 2 + b, -1 - b, 2)$ i $\mathbb{R}^4$ linjärt oberoende?

5. Delrummet M till $\mathbb{R}^4$ ges av

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Finn en bas i M.

6. L är ett linjärt rum, u, v, w är tre linjärt oberoende vektorer i L. Låt a vara en reell konstant. M är det delrum till L som spänns upp av vektorerna $g_1 = u+(a+1)v+w$ $g_2 = u+(3-a)v+aw$ och $g_3 = au + 2v + (2 - a)w$, $M = \text{span}\{g_1, g_2, g_3\}$. Bestäm $\dim M$ för varje värde av den reella konstanten a.

7. Bestäm en bas i det linjära höljet M av $v_1 = (1, 1, 2, -1)$, $v_2 = (-1, -1, -2, 1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 1)$, $v_4 = (3, 2, 2, 0)$, $v_5 = (1, 0, -2, 2)$, $v_6 = (0, 1, 4, -3)$ och ange koordinaterna för de givna vektorerna i denna bas.

8. $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är en bas i vektorrummet V. Inför en ny bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genom

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i basen $\mathcal{B}$ och bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ i basen $\mathcal{E}$. Bestäm även koordinaterna för $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ i baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{E}$. Ange basbytesmatriserna T_{be} och T_{eb}.

Facit:

1. $a = 2$. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_4)$ utgör en bas i M (t.ex.). Om $a = 2$: $v = -u_1 + 2u_2 + u_4 = (-1, 2, 1)_{\mathbf{u}}$.

2. T.ex $(1, 5, 3, 0)$.

3. (a) $v \in N, w \notin N$, (b) $a = 1$, (c) $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 - y_2 - y_3 = 0\}$

4. $b \neq -1$.

5. $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (-2, -3, 0, 1)$ (t.ex.)

6. $\dim M = 3$ om $a \neq -6, 1$, $\dim M = 2$ om $a = -6$ och $\dim M = 1$ om $a = 1$.

7. T.ex. $\{v_1, v_3\}$ är en bas i M och $v_2 = -v_1$; $v_4 = v_1 + v_3$; $v_5 = v_3 - v_1$; $v_6 = 2v_1 - v_3$.

8.

$$\mathbf{u} = -\frac{7}{4}\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 + \frac{5}{4}\mathbf{b}_3, \qquad \mathbf{v} = 10\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

och

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \frac{19}{4}\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{b}_3 = 7\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

Inför lektionerna 3 och 4

Till lektionerna 3 och 4 bör du **förbereda (dvs försöka lösa)** följande uppgifter:

avs.6.1, s.343: 3-6, 9-13, 16, 19,

avs.6.2, s.350-351: 1-11, 15-18,

avs.6.3, s.364-366: 3-9, 16, 18, 20, 22, 23,

avs.7.1, s.395-396: 1-3, 6-9, 13.

Extraövningar till lektionerna 3 och 4.

1. Använd Gram-Schmids metod för att ortogonalisera: $(1,1,1)$, $(1,0,2)$, $(-1,2,1)$ i $\mathbb{E}^3$.

2. Bestäm en ON-bas i $M = \text{span}\{(2,1,1,1), (2,2,0,3), (0,1,-1,2), (1,0,0,1)\}$ som ett delrum i $\mathbb{E}^4$.

3. M är ett delrum till $\mathbb{E}^4$ som definieras genom

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \text{ och } x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

(a) Finn en ON-bas i M.

(b) Finn en ON-bas i det ortogonala komplementet $M^\perp$.

(c) Skriv vektorn $u = (1,1,2,0) \in \mathbb{E}^4$ som en summa $u = u_1 + u_2$ med $u_1 \in M$ och $u_2 \in M^\perp$.

(d) $P : \mathbb{E}^4 \longrightarrow \mathbb{E}^4$ är den **ortogonala** projektionen av $\mathbb{E}^4$ på M. Finn P:s matris i standardbasen i $\mathbb{E}^4$. (Gör denna uppgift inför lektion 4!)

Obs: Kunde du först lösa del (d) och därefter, med hjälp av denna lösning, del (c) av uppgiften?

4. Bestäm den ortogonala projektionen av $u = (1,1,2)$ på linjära höljet M av $(2,-1,0)$, $(1,-1,2)$, $(1,0,-2)$ och använd den för att finna avståndet från u till M.

5. Låt $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in \mathbb{E}^3$. Bestäm en ON-bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{E}^3$ sådan att $\mathbf{u}$ har koordinatvektorn $(\mathbf{u})_\mathcal{B} = (0,1,0)$ i basen $\mathcal{B}$.

6. Låt $M = \text{span}\{(1,1,1,1), (1,1,0,0)\}$ och låt $\text{proj}_M : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara ortogonala projektionen på M. Bestäm standardmatrisen för proj_M. Vad blir $\text{proj}_M(1,2,3,-5)$? Bestäm även avståndet från $(1,2,3,-5)$ till M.

7. Rummet $\mathcal{P}_2$ (av alla polynom med grad högst 2) förses med den inre produkten $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$. Bestäm med Gram-Schmidt's metod, utgående från basen 1, x, x^2, en ON-bas i $\mathcal{P}_2$. Visa att

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = \frac{(3a_0 + a_2)(3b_0 + b_2)}{9} + \frac{a_1b_1}{3} + \frac{4a_2b_2}{45}$$

Låt $M = \text{span}\{1 + x - x^2\}$. Bestäm ON-baser i M och $M^\perp$.

8. Låt $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

(a) Bestäm standardmatrisen P för ortogonala projektionen på M och standardmatrisen Q för ortogonala projektionen på $M^\perp$.

(b) Beräkna $\text{proj}_M(1,2,3,4)$ och $\text{proj}_{M^\perp}(1,2,3,4)$. Beräkna även de båda avstånden från $(1,2,3,4)$ till M respektive $M^\perp$.

(c) Låt F vara projektionen på M parallellt med $N = \text{span}\{(1,0,1,-1),(1,2,0,-1)\}$ och låt G vara projektionen på N parallellt med M. Bestäm standardmatriserna A och B för F respektive G (d.v.s $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$).

(d) Beräkna $F(1,2,3,4)$ och $G(1,2,3,4)$.

Facit:

1. $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$, $(-2,1,1)$.

2. T. ex. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$, $\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$, $\frac{1}{6}(1,5,3,-1)$.

3.(a). $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-2,1)$. (t.ex.)

3.(b). $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2)$. (t.ex.)

3.(c). $u = u_1 + u_2$ med $u_1 = (1,0,1,-1) \in M$ och $u_2 = (0,1,1,1) \in M^\perp$.

3.(d). $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Projektionen är $\frac{1}{21}(5,-11,34)$ och avståndet är $8/\sqrt{21}$.

5. T.ex $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)/\sqrt{2}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_3 = (-1,2,-1)/\sqrt{6}$.

6. proj_M har standardmatrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{proj}_M(1,2,3,-5) = (3,3,-2,-2)/2$. Avståndet är $\frac{1}{2}\sqrt{130}$.

7. ON-basen i $\mathcal{P}_2$ (som Gram-Schmidt frambringar) är $\{1, \sqrt{3}\,x, \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)\}$. En ON-bas i M är $\left\{\sqrt{\frac{15}{13}}(1+x-x^2)\right\}$. En ON-bas i $M^\perp$ är $\left\{\sqrt{\frac{3}{7}}(1-2x), \sqrt{3/364}(9-4x-35x^2)\right\}$.

8.

(a)

$$P = P^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = I - P = Q^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathrm{proj}_M(1,2,3,4) = (-5,3,4,1)/3$ och $\mathrm{proj}_{M^\perp}(1,2,3,4) = (8,3,5,11)/3$. Avstånden är $\frac{1}{3}\sqrt{219}$ respektive $\frac{1}{3}\sqrt{51}$.

(c)

$$A = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = I - A = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(d) $F(1,2,3,4) = (-26,-36,-5,31)$, $G(1,2,3,4) = (27,38,8,-27) = (1,2,3,4) - F(1,2,3,4)$.

Inför lektionerna 5 och 6

Till lektionerna 5 och 6 bör du förbereda följande uppgifter:

avs.5.1, s.303-304: **1-8, 12, 14, 19, 22,**

avs.5.2, s.313-314: **1, 2, 6, 7, 17, 19, 21,**

avs.5.4, s.332: **1-9,**

avs.7.2, s.404-405: **7, 9, 10, 12.**

Extraövningar inför lektionerna 5 och 6

1. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

där a är en reell konstant. För vilka värden på konstanten a är avbildningen F diagonaliserbar? För varje sådan a bestäm en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

2. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facit:

1. F är diagonaliserbar omm $a = 1$. Om $a = 1$: en bas av egenvektorer till F : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1)$. (t.ex.)

2. Egenvärden: 0, 4. Egenvektorer för 0: $(1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$; egenvektorer för 4: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Inför lektionerna 7 och 8

Till lektionerna 7 och 8 bör du förbereda följande uppgifter:

avs.8.1, s.442-443: **2-5, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 31, 32,**

avs.8.2, s.451-452: **1-6, 13, 17,**

avs.8.3, s.457-458: **1-6, 13, 21,**

avs.8.4, s.466-467: **1, 3, 4, 6-8, 10, 12,**

avs.8.5, s.473-474: **2-5, 12, 13.**

Extraövningar till lektionerna 7 och 8

1. För vilka värden på den reella konstanten a finns en linjär operator på $\mathbb{R}^3$ vars nollrum spänns upp av vektorerna $(1,0,1)$, $(1,1-a,a)$ samtidigt som värderummet spänns upp av vektorerna $(1,-1,1)$ och $(1,1-a,1)$? Ge exempel på en sådan linjär operator i de fall sådana existerar.

2. Låt F vara den linjära operatorn på $\mathbb{R}^3$ som har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

och låt M vara delrummet till $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorn $(1,2,3)$. Delrummet N till $\mathbb{R}^3$ definieras genom $N = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\mathbf{u}) \in M\}$.

(i) Visa att N är ett delrum till $\mathbb{R}^3$

(ii) Bestäm en bas i N.

3. Vi ser vektorerna i $\mathbb{R}^2$ som kolonnmatriser. Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{22}$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,\mathbf{x}^T, \quad \text{där} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Visa att F är linjär.

(b) Bestäm F:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^2$ och M_{22}.

(c) Bestäm en bas i $N(F)$ och en bas i $V(F)$.

4. Låt n vara ett positivt heltal. Mängden Q av alla kvadratiska former $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ utgör ett delrum till funktionsrummet över $\mathbb{R}^n$ (vektorrummet av alla funktioner $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$). Låt M vara det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser och betrakta avbildningen $F : M \longrightarrow Q$ som ges av $F(A) = q_A$, där $q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ ses som en kolonnmatris).

(a) Visa att F är linjär.

(b) Bestäm dimensionerna av $N(F)$, $V(F)$ och Q.

Facit:

1. Antag att F har standardmatrisen A. Av dimensionssatsen, d.v.s $\dim(N(F))+\dim(V(F)) = 3$, följer att endera har vi $\dim(N(F)) = 1$ eller $\dim(V(F)) = 1$. Detta inträffar då $a = 1$ respektive då $a = 2$ (då $a \notin \{1, 2\}$ finns *ingen* operator F av önskat slag). I det första fallet ($a = 1$) gäller $N(F) = \text{span}\{(1, 0, 1)\}$, $V(F) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. Vektorerna (x_1, x_2, x_3) i A:s radrum måste då uppfylla $x_1 + x_3 = 0$ så en bas i radrummet är t.ex $(1, 0, -1)$ och $(0, 1, 0)$. Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har vi därför en operator F som uppfyller kraven.

I det andra fallet ($a = 2$) gäller $V(F) = \text{span}\{(1, -1, 1)\}$, $N(F) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$. Vektorerna (x_1, x_2, x_3) i A:s radrum måste då uppfylla $x_1 + x_3 = 0$ och $-x_2 + x_3 = 0$ så en bas i radrummet är t.ex $(1, -1, -1)$. Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

får vi därför en operator F med $N(F)$ och $V(F)$ enligt ovan.

2.

(i) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in N$, $k \in \mathbb{R}$ så får vi $F(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = kF(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \in M$ ty $F(\mathbf{u}) \in M$, $F(\mathbf{v}) \in M$ och M är ett delrum.

(ii) Då $\mathbf{x} \in N \Leftrightarrow F(\mathbf{x}) = (s, 2s, 3s)$ för något $s \in \mathbb{R}$ följer att N utgörs av lösningarna till det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -3 & s \\ 1 & -1 & 1 & 2s \\ 1 & -2 & 2 & 3s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & -1 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av den sista matrisen framgår att $N = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = s, x_3 = x_2 + s\}$ vilket betyder att $N = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

3.

(a)

$$F(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{b}\,(k\mathbf{u} + \mathbf{v})^T = k\,\mathbf{b}\,\mathbf{u}^T + \mathbf{b}\,\mathbf{v}^T = k\,F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}).$$

(b)

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$N(F) = \{\vec{0}\} \qquad V(F) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Inför lektion 9

Till lektion 9 bör du förbereda följande uppgifter:

avs.7.3, s.415-416: 1-4, 6, 9, 14, 25-28.

Inför lektion 10

Lektion 10 ägnas åt tentamensförberedelser.

Blandade övningar

1. Visa att det finns en unik inre produkt i $\mathbb{R}^2$ på formen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2,$$

sådan att $\mathbf{b}_1 = (3, 2)$ och $\mathbf{b}_2 = (4, 3)$ utgör en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ med avseende på denna inre produkt. Bestäm även alla 2×2-matriser A sådana att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x}) \bullet (A\mathbf{y})$.

Facit:

1. Den unika inre produkten är $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 13x_1y_1 - 18x_1y_2 - 18x_2y_1 + 25x_2y_2$. De sökta matriserna ges av $A = PM$, där P är en godtycklig ortogonalmatris,

$$M = B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$