UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra II
ES, KandFy, Q, X

Lösningar till tentamen i linjär algebra II, 2011–01–12

1. Låt $\mathcal{P}_3$ beteckna rummet av alla polynom av grad högst tre. Delrummet M till $\mathcal{P}_3$ spänns upp av polynomen $p_1(t) = 1 - t + t^3$, $p_2(t) = 2 + t + t^2 - t^3$, $p_3(t) = 3t + t^2 - 3t^3$, $p_4(t) = 1 + 2t + 3t^2 + t^3$, $p_5(t) = 1 - t + 2t^2 + 4t^3$. Bestäm en bas i M bland dessa polynom. Visa att det finns ett $a \in \mathbb{R}$ sådant att $p(t) = 2 - a + 5t + (1 - 2a)t^2 + at^3$ ligger i M och bestäm, i detta fall, koordinaterna för $p(t)$ med avseende på den bas i M du förut fann.

Lösning. Vi bildar en matris med koordinatvektorerna för $p_1, \ldots, p_5$, med avseende på standardbasen i $\mathcal{P}_3$, som kolonner och gör radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att (p_1, p_2, p_4) utgör en bas i M. Koordinaterna för p, i fallen då $p \in M$, ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 2-a \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1-2a \\ 1 & -1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att $p(t) \in M$ om och endast om $a = -2$, i vilket fall koordinaterna för p, med avseende på basen (p_1, p_2, p_4), är $-1,\ 2,\ 1$. □

2. Ett delrum till $\mathbb{E}^4$ ges av

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 - x_4 = 0\}$$

Bestäm en ON-bas i L och skriv vektorn $\mathbf{u} = (3, 2, 1, 0)^t$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in L$ och $\mathbf{u}_2 \in L^\perp$. Beräkna även avståndet från $\mathbf{u}$ till $L^\perp$.

Lösning. Vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ligger i L omm $x_1 = x_4$ och x_2, x_3, x_4 är godtyckliga, alltså omm

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4$$

Vektorerna $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ bildar en ortogonalbas i L. Genom att normera denna bas får vi ON-basen $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4/\sqrt{2})$ i L.

En bas i $L^\perp$ är $(\mathbf{b}_1) = ((1,0,0,-1)^t)$

Projektionen $\mathbf{u}_2$, av $\mathbf{u}$ på $L^\perp$, ges av

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och vi har

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Slutligen gäller att

$$\mathrm{Avst}(\mathbf{u}, L^\perp) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{u}_1\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{9+16+4+9} = \tfrac{1}{2}\sqrt{38}$$

$\square$

3. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^3$ som spänns upp av vektorerna $(1,0,1)^t$ och $(1,1,2)^t$. $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ är den ortogonala projektionen på M. Bestäm standardmatrisen för F.

Lösning. M är ett plan genom origo. En normalvektor till M är

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Låt $G : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ vara den ortogonala projektionen på $\mathbf{n}$ och låt P, Q beteckna standardmatriserna för F respektive G. Vi har sambandet $F = I - G$ (se kryssproblem 2 till lektion 3 2009). Av detta följer att $P = I - Q$. Q ges av

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} P = I - Q &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P^t = P^2. \end{aligned}$$

$\square$

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 3y_2(t) \\ y_2'(t) = -3y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -3$.

Lösning. På matrisform kan systemet skrivas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3^2 = \\ &= (1-\lambda+3)(1-\lambda-3) = (4-\lambda)(-2-\lambda). \end{aligned}$$

Alltså $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{t.ex.} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

För matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{med inversen} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller då att $P^{-1}AP = D$, där D är diagonalmatrisen med egenvärdena $4, -2$ i diagonalen. Genom transformationen $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t)$ fås systemet $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t)$, d.v.s. $z_1'(t) = 4z_1(t)$, $z_2'(t) = -2z_2(t)$ med lösningen $z_1(t) = c_1e^{4t}$, $z_2(t) = c_2e^{-2t}$. Här gäller att

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilket slutligen ger oss lösningen

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{-2t} \\ -2e^{4t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Svar: $y_1(t) = 2e^{4t} - e^{-2t}$, $y_2(t) = -2e^{4t} - e^{-2t}$. $\square$

5. Visa att ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 1$$

beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt minsta avståndet från ytan till origo. Rita figur!

Lösning. Den kvadratiska formen i vänsterledet har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ -3-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ -3-\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1a & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-3-\lambda)(3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -3$. Ytan är en rotationsyta ty λ_1 har algebraisk multiplicitet två. Ytans ekvation i principalkoordinaterna är $3\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2 = 1$. Det betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid med avståndet $1/\sqrt{3}$ till origo.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_{1,2} = 3$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ges alltså av ekvationen $x + y + z = 0$. Då $\mathbf{v}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ måste den vara parallell med $(1, 1, 1)$. Rotationsaxeln är därför den räta linjen med ekvationen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. $\square$

6. Låt $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla symmetriska 2×2-matriser. En linjär operator F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -x_3 \\ -x_3 & -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och visa att F ej är diagonaliserbar.

Lösning. Standardbasen i $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ är

$$\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 \\
F(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\
F(\mathbf{e}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Standardmatrisen för F är därför

$$
A = [F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Egenvärdena till F ges av

$$
0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2
$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Egenvektorerna till $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenrummet till $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ har dimension 1, så den geometriska multipliciteten är mindre än den algebraiska multipliciteten. F är alltså inte diagonaliserbar. $\square$

7. Låt $\mathbb{R}^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla 2×2-matriser. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^{(2,2)} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ är sådan att

$$
[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

där

$$
\underline{b} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{och} \quad \underline{c} = \left(1+t^2,\ 1-t,\ t\right)
$$

Bestäm $[F]_{es}$ där

$$
\underline{s} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{och} \quad \underline{e} = \left(1,\ t,\ t^2\right)
$$

Ange även baser i F:s noll- och värderum ($N(F)$ respektive $V(F)$).

Lösning. Bassambanden är

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{b}_4 &= \mathbf{s}_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{s}_1 &= \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{s}_3 &= \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{s}_4 &= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

$\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_2$. Från $[F]_{cb}$ avläser vi att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_1) &= \mathbf{c}_1 \\ F(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{c}_2 \\ F(\mathbf{b}_3) &= \vec{0} \\ F(\mathbf{b}_4) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Detta ger oss $V(F) = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$, $N(F) = [\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4]$ och

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}_1) &= F(\mathbf{b}_4) = \vec{0} \\ F(\mathbf{s}_2) &= F(\mathbf{b}_3) - F(\mathbf{b}_4) = \vec{0} \\ F(\mathbf{s}_3) &= F(\mathbf{b}_2) - F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ F(\mathbf{s}_4) &= F(\mathbf{b}_1) - F(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

vilket betyder att matrisen för F med avseende på standardbaserna ges av

$$[F]_{es} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

8. $\mathbb{R}^2$ förses med en skalärprodukt $\langle -, - \rangle$, sådan att

$$\underline{b} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

utgör en ON-bas. Bestäm en matris G sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}, \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$$

Låt F vara den linjära operatorn på $\mathbb{R}^2$ som har standardmatrisen

$$[F] = \begin{pmatrix} 4a & 2a \\ -5a & 10a \end{pmatrix}$$

där a är en reell konstant. Bestäm alla värden på a för vilka F är en isometrisk operator, alltså uppfyller

$$\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$$

Lösning. Sambanden mellan standardbasen $\underline{e}$ (som ej är en ON-bas) och basen $\underline{b}$ är

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

Eftersom $\underline{b}$ är en ON-bas får vi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle &= \langle 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \rangle = 4 + 1 = 5 \\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle &= \langle 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \rangle = -2 - 1 = -3 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle &= \langle -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \rangle = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

vilket medför att

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

F:s standardmatris ger oss

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_1) &= F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_2) = (4a\mathbf{e}_1 - 5a\mathbf{e}_2) + (2a\mathbf{e}_1 + 10a\mathbf{e}_2) = 6a\mathbf{e}_1 + 5a\mathbf{e}_2 \\ &= 6a(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + 5a(-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = 7a\mathbf{b}_1 - a\mathbf{b}_2 \\ F(\mathbf{b}_2) &= F(\mathbf{e}_1) + 2F(\mathbf{e}_2) = (4a\mathbf{e}_1 - 5a\mathbf{e}_2) + 2(2a\mathbf{e}_1 + 10a\mathbf{e}_2) = 8a\mathbf{e}_1 + 15a\mathbf{e}_2 \\ &= 8a(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + 15a(-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = a\mathbf{b}_1 + 7a\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

F är en isometrisk avbildning om och endast om $(F(\mathbf{b}_1), F(\mathbf{b}_2))$ är en ON-bas. Av ovanstående följer att

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{b}_1), F(\mathbf{b}_1) \rangle &= \langle 7a\mathbf{b}_1 - a\mathbf{b}_2, 7a\mathbf{b}_1 - a\mathbf{b}_2 \rangle = 49a^2 + a^2 = 50a^2 \\ \langle F(\mathbf{b}_1), F(\mathbf{b}_2) \rangle &= \langle 7a\mathbf{b}_1 - a\mathbf{b}_2, a\mathbf{b}_1 + 7a\mathbf{b}_2 \rangle = 7a^2 - 7a^2 = 0 \\ \langle F(\mathbf{b}_2), F(\mathbf{b}_2) \rangle &= \langle a\mathbf{b}_1 + 7a\mathbf{b}_2, a\mathbf{b}_1 + 7a\mathbf{b}_2 \rangle = a^2 + 49a^2 = 50a^2 \end{aligned}$$

Alltså är F isometrisk om och endast om $50a^2 = 1$, d.v.s $a = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$. $\square$