UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Magnus Jacobsson, Bo Styf

Prov i matematik
TRANSFORMMETODER
2011-12-16

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogad formelsamling. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt (med ev. bonus inräknad) minst 18, 25 respektive 32 poäng. På varje uppgift kan man få maximalt 5 poäng.

1. Lös med hjälp av laplacetransformen differentialekvationen

$$y'(t) + y(t) = 2\cos t$$

där $y(0) = 1$. (5)

2. Ett LTI-system ges av differentialekvationen

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = x(t),$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och avgör om systemet är stabilt. (5)

3. Låt $f(t)$ vara den *jämna* 2-periodiska funktion som för $0 < t < 1$ ges av $f(t) = 1 - t^2$.

(a) Skissa grafen av $f(t)$ på intervallet $-2 < t < 2$.

(b) Beräkna fourierserien för $f(t)$. (5)

4. *Denna uppgift kan lösas utan beräkning av några fourierkoefficienter!* Låt $f(t)$ vara som i uppgift 3 ovan. Låt $g(t)$ vara den *udda* 2-periodiska funktion som för $0 < t < 1$ ges av $g(t) = 1 - t^2$.

(a) Skissa grafen av $g(t)$ på intervallet $-2 < t < 2$.

(b) Mot vilka värden konvergerar de båda fourierserierna (för $f(t)$ respektive $g(t)$) i punkterna $t = 0$ och $t = \frac{3}{2}$?

(c) För vilken av de två funktionerna avtar fourierkoefficienterna snabbast då $n \to \infty$? (Med andra ord: Var kan du förvänta dig bäst konvergens hos fourierserien?) (5)

5. Ett LTI-system ges av differensekvationen

$$y(n+1) + y(n) = x(n),$$

där $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets impulssvar och överföringsfunktion.

(b) Avgör om systemet är stabilt. (5)

6. Bestäm funktionen $f(t),\ t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}$$

Skissa även f:s graf. (5)

7. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(5)

8. Låt $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty.$

(a) Bestäm fouriertransformen av f.

(b) Visa att $\dfrac{\pi}{e} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin t \, dt.$ (5)