Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Transformmetoder, 5 hp
gyL, IT, W, X
2011-10-26

Att repetera.

Vi samlar här en del material från tidigare kurser som kan vara användbart under kursens gång.

- **Serier.** En serie (eller oändlig summa) $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ är ett **försök** att addera alla talen i en följd $(a_n), n \geq N$. Om försöket lyckas säger vi att serien är **konvergent**. Om försöket misslyckas säger vi att serien är **divergent**.

  Försöket består i att man bildar följden (s_n) bestående av **delsummorna**

  $$s_n = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n, \qquad n = N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots$$

  Försöket definieras som lyckat om $S = \lim s_n$ existerar. Serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ är då **konvergent** med värdet (eller summan) S. Vi skriver då

  $$S = \sum_{n=N}^{\infty} a_n.$$

  Försöket definieras som misslyckat om $S = \lim s_n$ inte existerar. Serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ är då **divergent**, d.v.s **det går inte** att addera talen i följden $(a_n), n \geq N$.

- **Geometriska serier.** Om vi försöker addera talen $a_n = x^{n-1}$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, där x är ett reellt tal, så får vi den geometriska serien

  $$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

  För delsummorna $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ har vi $xs_n = x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$ och

  $$(1-x)s_n = s_n - xs_n = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - (x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n) = 1 - x^n$$

  vilket ger

  $$s_n = n, \quad \text{då } x = 1, \qquad s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n - 1}{x-1}, \quad \text{då } x \neq 1. \tag{$*$}$$

  Med hjälp av $(*)$ ser vi att den geometriska serien divergerar om $|x| \geq 1$ och konvergerar om $-1 < x < 1$. I det senare fallet har vi

  $$S = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

- **Räkneregel för konvergenta serier.** Om $\sum a_n, \sum b_n$ är konvergenta och $A,\ B$ är konstanter så är $\sum(Aa_n + Bb_n)$ konvergent och

$$\sum(Aa_n + Bb_n) = A\sum a_n + B\sum b_n$$

Om däremot $\sum a_n$ är konvergent, medan $\sum b_n$ är divergent, och $A,\ B$ är konstanter, $B \neq 0$, så är $\sum(Aa_n + Bb_n)$ divergent.

- **Sats.** Om $\sum_1^\infty a_n$ konvergerar så måste $a_n \to 0$. Denna sats kan **bara** användas för att bevisa att serier **divergerar**.

- **Absolutkonvergens.** En serie $\sum_{n=N}^\infty a_n$ sägs vara absolutkonvergent om $\sum_{n=N}^\infty |a_n| < \infty$. En absolutkonvergent serie är automatiskt konvergent.

- **Alternerande serier.** En alternerande serie är en serie där varannan term är positiv och varannan term är negativ. En alternerande serie kan alltså skrivas som

$$\sum_{n=N}^\infty (-1)^{n-1}a_n \qquad \text{eller} \qquad \sum_{n=N}^\infty (-1)^n a_n \tag{$*$}$$

där $a_n > 0$ för alla n.

- **Leibniz konvergenskriterium.** Om a_n **avtar** mot 0 så konvergerar $(*)$.

- **Exempel.** Enligt Leibniz kriterium konvergerar serierna

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=N}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=N}^\infty \frac{\cos n\pi}{1+\ln n} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=N}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

- **Partiell integration.** Detta är baklängesvarianten av produktregeln, $(AB)' = A'B + AB'$, för derivation. Antag att F är en antiderivata till f. För den obestämda integralen av en produkt $f\,g$ gäller

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

För en bestämd integral av $f\,g$ gäller

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Detta fungerar normalt bara om $g'(x)$ är en enklare funktion än $g(x)$. Så är fallet om t.ex. $g(x)$ är ett polynom, $g(x) = \ln x$ eller $g(x) = \arctan x$.

- **Exempel.**

$$\int te^{2t}\,dt = t\frac{1}{2}e^{2t} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2t}\,dt = C + \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

- **Exempel.**

$$\int_0^\pi t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi (-1)\cos t\,dt = -\pi\cos\pi + [\sin t]_0^\pi = \pi.$$

- **Trigonometriska formler.** Exponentiallagen

$$e^w e^z = e^{w+z} \quad \text{för alla} \quad w, z \in \mathbb{C} \tag{$*$}$$

gör det enkelt att härleda behövliga trigonometriska formler. Sätter vi, till exempel, $w = i\varphi,\ z = i\theta$ i $(*)$ får vi

$$\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta) = e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi}e^{i\theta} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)$$

Identifikation av real- och imaginärdelar ger

$$\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta$$

och

$$\sin(\varphi+\theta) = \cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta$$

För att göra dessa härledningar behöver vi även kunna binomialformeln (se nedan) och Eulers formler

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \qquad \sin\theta = \tfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

- **Problem.** Skriv $f(x) = 8\cos x\cos 2x\cos 3x$ som en summa av termer av typen $a\cos\omega x$.

Lösning. Med hjälp av exponentiallagen och Eulers formler får vi

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2\cos x)(2\cos 2x)(2\cos 3x) = (e^{ix} + e^{-ix})(e^{2ix} + e^{-2ix})(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= (e^{3ix} + e^{-3ix} + e^{ix} + e^{-ix})(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= 1 + 1 + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{4ix} + e^{-4ix} + e^{6ix} + e^{-6ix} \\
&= 2 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x
\end{aligned}$$

□

- **Problem.** Skriv $g(x) = \sin^5 x$ som en summa av termer av typen $a\sin\omega x$.

Lösning. Med hjälp av exponentialformeln, binomialformeln och Eulers formler får vi

$$\begin{aligned}
32i\,g(x) &= \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 \\
&= e^{5ix} - 5\,e^{4ix}e^{-ix} + 10\,e^{3ix}e^{-2ix} - 10\,e^{2ix}e^{-3ix} + 5\,e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix} \\
&= e^{5ix} - e^{-5ix} - 5\,e^{3ix} + 5\,e^{-3ix} + 10\,e^{ix} - 10\,e^{-ix} \\
&= 2i\,\sin 5x - 10i\,\sin 3x + 20i\,\sin x
\end{aligned}$$

Detta ger

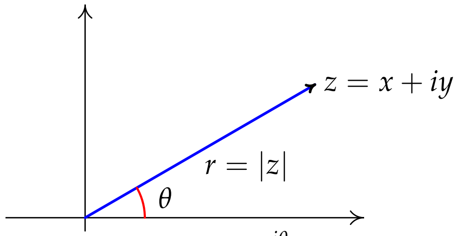
$$g(x) = \tfrac{5}{8}\,\sin x - \tfrac{5}{16}\,\sin 3x + \tfrac{1}{16}\,\sin 5x$$

□

- **Polär representation av komplexa tal.** Varje komplext tal $z = x + yi$ har en polär framställning

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\,e^{i\theta},$$

där $r = |z|$ och θ är vinkeln som z, sett som en från origo emanerande vektor, bildar tillsammans med positiva reella axeln.



$$z = x + iy = r\,e^{i\theta}.$$

- **Komplexa exponentialfunktionen.** Denna definieras, för varje komplext tal $w = u + iv$, genom
$$e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$
Sätter vi här $u = x,\ v = 0$ så får vi
$$e^x = e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x(1 + 0i) = e^x(1) = e^x$$
Ovanstående definition ger alltså, för reella variabelvärden, samma resultat som den tidigare definierade exponentialfunktionen. Tar vi i stället $u = 0,\ v = \theta$ får vi
$$e^{i\theta} = e^{0+i\theta} = e^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$
För dessa tal har vi
$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$
(trigonometriska ettan). De komplexa talen $e^{i\theta}$, för reella θ, svarar alltså mot punkter på enhetscirkeln (och omvänt svarar varje punkt på enhetscirkeln mot ett sådant tal). För varje nollskilt komplext tal z gäller att $z/|z|$ har absolutbeloppet ett. Alltså kan vi finna θ så att
$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \quad \text{alltså} \quad z = |z|\,e^{i\theta}$$
vilket ju är den polära representationen. Den polära representationen är inte unik. För varje heltal n gäller att
$$z = |z|\,e^{i(\theta+2\pi n)}$$
För den komplexa exponentialfunktionen gäller formeln
$$e^w e^z = e^{w+z} \quad \text{för alla} \quad w, z \in \mathbb{C} \qquad (*)$$
(den så kallade exponentiallagen). Av $(*)$ följer direkt att
$$(e^z)^n = e^{nz} \quad \text{för alla} \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}$$
($\mathbb{Z}$ betecknar heltalen).

- **Binomialformeln och Pascals triangel.**
$$\begin{aligned}
(1+z)^n = (1+z)\ldots(1+z) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \cdots + \binom{n}{k}z^k + \cdots + \binom{n}{n}z^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = (1+z)(1+z)^{n-1} \\
&= (1+z)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}z^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)z^k + z^n
\end{aligned}$$

Potensen z^k, för $0 \leq k \leq n$, fås genom att man i produkten $(1+z)\dots(1+z)$ väljer z från k av parenteserna och 1 ur de resterande $n-k$ parenteserna. Ett sådant val kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt, vilket ger oss koefficienten framför z^k. Vi ser också att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

för $0 < k < n$. Detta samband ger oss Pascals triangel

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

som är användbar vid beräkning av $(a+b)^n$, för inte alltför stora n. Exempelvis

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- **Teorin för partialbråksuppdelning.**
  - **Sats.** Om $T(x)$, $N(x) = N_1(x)N_2(x)$ är polynom, sådana att T har lägre grad än N och N_1, N_2 saknar gemensamma nollställen, så finns polynom T_1, T_2 sådana att

    $$\frac{T}{N} = \frac{T}{N_1N_2} = \frac{T_1}{N_1} + \frac{T_2}{N_2}$$

    där T_1 har lägre grad än N_1 och T_2 har lägre grad än N_2.

    Bevis. Eftersom N_1, N_2 saknar gemensamma nollställen finns, enligt Euklides algoritm (se nedan), polynom P_1, P_2 sådana att $P_1(x)N_2(x) + P_2(x)N_1(x) = 1$, för alla $x \in \mathbb{R}$. Det följer att

    $$\frac{T}{N_1N_2} = \frac{TP_1N_2 + TP_2N_1}{N_1N_2} = \frac{TP_1}{N_1} + \frac{TP_2}{N_2}$$

    Här kan det hända att TP_1 ej har lägre grad än N_1 eller att TP_2 ej har lägre grad än N_2. Genom polynomdivision (se nedan) får vi då

    $$\frac{T}{N_1N_2} = \frac{TP_1}{N_1} + \frac{TP_2}{N_2} = Q_1 + \frac{T_1}{N_1} + Q_2 + \frac{T_2}{N_2}$$

    där Q_1, Q_2, T_1, T_2 är polynom, T_1 har lägre grad än N_1 och T_2 har lägre grad än N_2. Här måste $Q_1 + Q_2$ vara nollpolynomet, för annars följer, om vi multiplicerar leden med N_1N_2, att T har högre grad än sig själv. $\square$

– **Sats.** Om $N(x) = M(x)^m$, där $m > 1$, och T har lägre grad än N så finns polynom $R_1, \ldots, R_m$, som alla har lägre grad än M, sådana att

$$\frac{T}{N} = \frac{T}{M^m} = \frac{R_1}{M} + \frac{R_2}{M^2} + \cdots + \frac{R_m}{M^m} \tag{$*$}$$

Bevis. Med polynomdivision får vi

$$\frac{T}{M^m} = \frac{1}{M^{m-1}} \frac{T}{M} = \frac{1}{M^{m-1}} \left(\frac{R_m}{M} + Q_m \right) = \frac{R_m}{M^m} + \frac{Q_m}{M^{m-1}}$$

där R_m har lägre grad än M och Q_m har lägre grad än M^{m-1}. Genom upprepning (med Q_m i stället för T och $m-1$ i stället för m o.s.v) fås $(*)$. $\square$

– **Polynomdivision.** Då polynomet $T(x)$ divideras med ett annat polynom $N(x)$ får man en kvot $Q(x)$ och en rest $R(x)$:

$$\frac{T(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) = Q(x)N(x) + R(x)$$

Om $T(x)$ har lägre grad än $N(x)$ blir kvoten noll och $R(x) = T(x)$. Under alla omständigheter har $R(x)$ lägre grad än $N(x)$. Divisionen går jämnt ut, d.v.s $T(x)$ är delbart med $N(x)$, om och endast om $R(x) = 0$.

– **Exempel.** Utför polynomdivisionen i fallet då $T(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x$ och $N(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Lösning. En vanlig divisionsuppställning med 'liggande stol' ger:

$$
\begin{array}{r|l}
2x \;\; +1 & \\
\hline
2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - \;\; x^2 + 2x & x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-2x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x & \\
\hline
x^4 - 2x^3 + 3x^2 \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \\
- x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 & \\
\hline
x^2 + 2x - 1 &
\end{array}
$$

Vi avläser att $Q(x) = 2x + 1$ och $R(x) = x^2 + 2x - 1$. $\square$

– **Euklides algoritm.** Största gemensamma delaren till två polynom $N_1(x)$, $N_2(x)$ definieras som det moniska polynomet $S(x)$ (ledande koefficienten är 1) av högsta möjliga gradtal som delar både $N_1(x)$ och $N_2(x)$. Varje polynom som delar både $N_1(x)$ och $N_2(x)$ måste dela $S(x)$. Av detta följer att den största gemensamma delaren är unik.

Antag att vi gör polynomdivisionen $N_1(x)/N_2(x)$ med resultatet

$$N_1(x) = Q_2(x)N_2(x) + N_3(x)$$

Av detta följer att ett polynom $S(x)$ delar både $N_1(x)$ och $N_2(x)$ om och endast om $S(x)$ delar både $N_2(x)$ och $N_3(x)$. Paren $N_1(x)$, $N_2(x)$ och $N_2(x)$, $N_3(x)$ har alltså samma största gemensamma delare. Euklides algoritm innebär att man gör en upprepad polynomdivision enligt schemat:

$$\begin{aligned}
N_1(x) &= Q_2(x)N_2(x) + N_3(x) \\
N_2(x) &= Q_3(x)N_3(x) + N_4(x) \\
&\vdots \\
N_{k-2}(x) &= Q_{k-1}(x)N_{k-1}(x) + N_k(x) \\
N_{k-1}(x) &= Q_k(x)N_k(x)
\end{aligned}$$

Man avbryter då divisionen går jämnt ut. Den största gemensamma delaren $S(x)$ är det moniska polynom som fås då $N_k(x)$ delas med sin ledande koefficient. Av schemat kan man även utläsa att det finns polynom $P_1(x),\ P_2(x)$ sådana att

$$S(x) = P_1(x)N_2(x) + P_2(x)N_1(x)$$

Den största gemensamma delaren är 1 om och endast om $N_1(x)$ och $N_2(x)$ saknar gemensamma komplexa nollställen. I ett sådant fall gäller alltså att det finns polynom $P_2(x),\ P_1(x)$ sådana att

$$1 = P_1(x)N_2(x) + P_2(x)N_1(x)$$