Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Mattias Enstedt

Prov i matematik
ES & W med flera
Fouriermetoder
2008–01–11

Skrivtid: 14.30-19.30. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och den formelsamling som är bifogad. Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.
Jourhavande lärare avser att komma till skrivsalen omkring klockan 16.30 för att höra om det finns frågor. Läs igenom hela texten till dess och kontrollera att du förstår alla formuleringar. Kontrollera om möjligt dina svar!

Uppgift 1 Utred för vilka a=u(0) och b=u(1) gränsvärdet

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{u(k)}{k}$$

existerar ändligt, givet att

$$u(k+2)-3u(k+1)+2u(k)=-1.$$

Uppgift 2 Hitta en lösning till

$$u(t)-\int_0^t\frac{(t-s)^3}{6}u(s)\mathrm{d}s=t^2,\quad t\geq 0,$$

som uppfyller $u(0)=0$.

Uppgift 3 Beräkna fourierserien (på komplex form) till $f(t):=e^t$, $t\in[-\pi,\pi)$ och bestäm

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}.$$

Motivera tydligt!

Uppgift 4 Ange en funktionsserie, u(x,t), som löser vågekvationen $u_{xx}=u_{tt}$ och uppfyller $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ för $t\geq 0$ samt $u_t(x,0)=0$ och $u(x,0)=\cos^2 x\sin x$ för $x\in[0,\pi]$.

Uppgift 5 Utred för vilka värden på $\delta>0$ det existerar lösningar i $L^1(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{u(t)}{(t-x)^2+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2+\delta^2}$$

och bestäm för dessa δ en lösning. Motivera tydligt.