UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson

Prov i matematik
Kandidatprogrammet
Fouriermetoder
2008–05–28

Varje problem är värt maximalt 8 poäng. För erhållande av maximal poäng skall lösningarna åtföljas av relevanta motiveringar. Betygsgränser för betygen 3, 4, 5 är 18, 25 respektive 32 poäng.
Skrivtid: *09:00–14:00.*
Tillåtna hjälpmedel: *Bifogad formelsamling.*

1. Lös, med hjälp av Laplacetransformering, ekvationssystemet

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau = & t \\ 2y'(t) + 3x'(t) + 6x(t) = & 0 \end{cases}, \ t > 0,$$

givet att $x(0) = 2$ och $y(0) = -3$.

2. Undersök om differensekvationen

$$y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = u(n)$$

är stabil. Lös ekvationen i fallet då $u(n) = 0$ och $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

3. Låt $f(t)$ vara en udda funktion med period 2π, sådan att $f(t) = t^2$ för $0 \le t < \pi$.

a) Utveckla $f(t)$ i en Fourierserie.

b) Bestäm med hjälp av a) en lösning till differentialekvationen

$$y''(t) + 4y(t) = f(t).$$

4. Antag att $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \omega e^{-\omega^2}$.

a) Bestäm $f(t)$.

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin x dx.$$

5. Lös med variabelseparation ekvationen

$$u_t' = u_{xx}'' - 2u, \ t > 0, 0 < x < 1,$$

där $u(x,t)$ satisfierar villkoren $u(0,t) = u(1,t) = 0$ för $t > 0$ och $u(x,0) = x$ för $0 < x < 1$.

Lösningar till tentamen i Fouriermetoder 2008–05–28

Lösning till problem 1. Laplacetransformering av de bägge ekvationerna ger

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)+\dfrac{X(s)}{s} = & -3+\dfrac{1}{s^2} \\ 2sY(s)+3(s+2)X(s) = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(s+1)Y(s)+X(s) = & -3s+\dfrac{1}{s} \\ 2sY(s)+3(s+2)X(s) = & 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger

$$\begin{cases} Y(s) = & -\dfrac{3(s+2)}{2s}X(s) \\ X(s) = & -\dfrac{2s}{3(s+2)}Y(s) \end{cases}$$

Insatt i ekvationen $s(s+1)Y(s)+X(s)=-3s+\dfrac{1}{s}$ ger detta

$$X(s)=\frac{6s^2-2}{s(3s^2+9s+4)}\frac{2}{3}\frac{3s^2-1}{s(s-a-b)(s-a+b)}$$

där $a=-\dfrac{3}{2}$ och $b=\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ (nollställena till $3s^2+9s+4$ är $s=a\pm b$). För $Y(s)$ fås

$$Y(s)=-3\frac{(3s^2-1)(s+2)}{s^2(3s^2+9s+4)}=-\frac{(3s^2-1)(s+2)}{s^2(s-a-b)(s-a+b)}.$$

Partialbråksuppdelning:

$$X(s)=-\frac{2}{3}\frac{3s^2-1}{s(s-a-b)(s-a+b)}=-\frac{2}{3}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s-a-b}+\frac{C}{s-a+b}\right).$$

Alltså är

$$x(t)=-\frac{2}{3}\left(A+Be^{(a+b)t}+Ce^{(a-b)t}\right)$$

där A, B och C ges av (använd handpåläggning)

$$A=\frac{1}{b^2-a^2}\ B=\frac{3(a+b)^2-1}{2b(a+b)}=,\ C=-\frac{3(a-b)^2}{2b(a-b)}.$$

För $Y(s)$ fås på liknande sätt

$$Y(s)=\frac{C}{s^2}+\frac{D}{s}+\frac{E}{s-a-b}+\frac{F}{s-a+b}$$

och därmed

$$y(t)=Ct+D+Ee^{(a+b)t}+Fe^{(a-b)t}.$$

Lösning till problem 2. Med $u(n)=0$, och $y(0)=0$, $y(1)=1$, fås med Z–transformering av bägge led att

$$Y(z)(z^2-z-2)=1\Leftrightarrow Y(z)=\frac{1}{z^2-z-2}$$

Polerna till överföringsfunktionen ges alltså av $z^2-z-2=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}$. Eftersom dessa har absolutbelopp ≥ 1 är ekvationen instabil.
Lösningen med $u(n)=0$, $y(0)=0$ och $y(1)=1$: Z–transformering av bägge led ger

$$Y(z)(z^2-z-2)-z=0\Leftrightarrow Y(z)=\frac{z}{z^2-z-2}=\frac{z}{(z-1)(z+2)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$Y(z)=\frac{z}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+2}\right)\sim\frac{1}{3}-\frac{(-2)^n}{3}=y(n).$$

Lösning till problem 3. a) Eftersom $f(t)$ är udda kan vi utveckla i en sinusserie. Vi får (med partiell integration)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[-t^2\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \left[2t\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \left[2\frac{\cos(nt)}{n^3}\right]_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1).$$

Alltså är den sökta Fourierserien

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nt.$$

b) Här tillkommer en extra svårighet, som missades då tentan gjordes (inga poäng har förlorats på grund av överseende med detta): ansatsen

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

kommer ej att fungera, eftersom (för $n = 2$) termen som innehåller $a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$ löser den homogena ekvationen $y''(t) + 4y(t) = 0$ men Fourierserieutvecklingen av $f(t)$ *innehåller* en term med $\sin 2t$ (denna heter $-\pi \sin 2t$). Därför måste ansatsen vara

$$y(t) \sim \frac{a_0}{2} + At\cos 2t + Bt\sin 2t + (\sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

(se exempelvis kursen i Ordinära Differentialekvationer, eller motsvarande). Vi får då att (derivera under summatecknet)

$$y''(t) \sim -4A\sin 2t + 4B\cos 2t - 4At\cos 2t - 4Bt\sin 2t + \sum_{n=1}^\infty (-n^2 a_n \cos nt - n^2 b_n \sin nt)$$

vilket medför att

$$2a_0 - 4A\sin 2t + 4B\cos 2t + \sum_{n=1}^\infty (a_n(4-n^2)\cos nt + b_n(4-n^2)\sin nt) \sim y''(t) + 4y(t) =$$

$$= f(t) \sim \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nt =$$

(skriv termen för $n = 2$ separat för tydlighets skull)

$$= -\frac{\pi}{4}\sin 2t + \sum_{n=1, n\neq 2}^\infty \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nt$$

Ur detta fås

$$a_0 = 0,\ a_n(4-n^2) = 0,\ b_n(4-n^2) = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \text{ om } n \neq 2,\ -4A = -\pi,\ B = 0.$$

vilket i sin tur leder till att $a_n = 0$ för $n \neq 2$, a_2 och b_2 godtyckliga, $A = \pi/4$, och

$$b_n = \frac{1}{n^2-4}\left(\frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{n^3}((-1)^n - 1)\right),\ n \neq 2.$$

Alltså blir

$$y(t) \sim \left(a_2 + \frac{t\pi}{4}\right)\cos 2t + b_2 \sin 2t + \sum_{n=1, n\neq 2}^\infty \frac{1}{n^2-4}\left(\frac{2\pi^2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nt.$$

Lösning till problem 4. a) Ur formelsamlingen ser man till exempel (det går att använda andra formler också) att

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-t^2/4} \sim e^{-\omega^2} \text{ och } f'(t) \sim i\omega\hat{f}(\omega).$$

Tillsammans ger dessa att

$$-\frac{t}{2\sqrt{4\pi}}e^{-t^2/4} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-t^2/4}\right) \sim i\omega e^{-\omega^2}$$

så vi får att $f(t) = \dfrac{it}{4\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$.

b) Integranden i den sökta integralen är jämn, så

$$I = \int_0^\infty xe^{-x^2}\sin x dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\sin x dx.$$

Vidare är

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\cos x dx = 0$$

eftersom denna integral har udda integrand. Härnäst observeras att (ur inversionsformeln med $t = 1$)

$$\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega)e^{i\omega}d\omega = 2\pi f(1)$$

Med vårt $f(t)$ ger detta (byt ut x mot ω i integralerna ovan)

$$\frac{2\pi i}{4\sqrt{\pi}}e^{-1/4} = \int_{-\infty}^\infty \omega e^{-\omega^2}e^{i\omega}d\omega = \int_{-\infty}^\infty \omega e^{-\omega^2}\cos\omega d\omega + i\int_{-\infty}^\infty \omega e^{-\omega^2}\sin\omega d\omega = \frac{i}{2}I$$

Alltså är den sökta integralens värde

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4}.$$

Lösning till problem 5. Kortfattad lösning: Ansatsen $u(x,t) = f(x)g(t)$ ger

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t) - 2f(x)g(t) \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} + 2 = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

där λ är en konstant. Vi får två differentialekvationer:

$$g'(t) + (2-\lambda)g(t) = 0 \text{ och } f''(x) - \lambda f(x) = 0.$$

Den andra av dessa, tillsammans med randvillkoren $f(0) = f(1) = 0$, ger att $\lambda = -n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$ och $f(x) = A\sin(n\pi x)$. Insatt i den andra ekvationen ger detta att $g(t) = Be^{-(2+n^2\pi^2)t}$. Alltså löser

$$u_n(x,t) = C_n e^{-(2+n^2\pi^2)t}\sin(n\pi x)$$

den givna differentialekvationen, och satisfierar randvillkoren. Ansatsen $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t)$ ger med fourierserieutveckling av $f(x) = x$ som en udda, 2–periodisk funktion, att

$$\sum_{n=1}^\infty C_n\sin(n\pi x) = u(x,0) = x \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$

vilket medför att $C_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$. Alltså är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^{n+1}}{n}e^{-(2+n^2\pi^2)t}\sin(n\pi x).$$