UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2008–10-13

Skrivtid: 09.00 – 14.00

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt bifogade formelsamling.

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

Lösningarna skall vara försedda med förklarande text.

1. Bestäm fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ till funktionen f om

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{för } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$ (5p)

2. Bestäm talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ om $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ och

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2 \cdot 3^n$$

för alla naturliga tal n. (6p)

3. Funktionen f är definierad på positiva reella axeln och satisfierar integral-differential-ekvationen

$$f'(x) - 6\int_0^x e^{x-y} f(y)\,dy = e^{2x}.$$

Vidare är $f(0) = 1$. Bestäm $f(x)$. (6p)

4. Funktionen f är periodisk med period 2π och

$$f(t) = e^t + e^{-t} \text{ för } -\pi \le t \le \pi.$$

a) Bestäm fourierserien (på komplex eller trigonometrisk form). (4p)

b) Beräkna med motivering summan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. (2p)

Var god vänd!

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \;\; t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(6p)

6. Definiera funktionerna f_a på reella axeln genom att sätta

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Beräkna för alla värden på de positiva konstanterna a och b faltningen $f_a * f_b$. (5p)

7. Funktionen f är kontinuerlig, periodisk med period 2π och har fourierkoefficienterna

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Låt F vara den primitiva funktion till f som uppfyller $F(0) = 0$, dvs.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

a) Visa att funktionen F är periodisk med period 2π om $c_0 = 0$, dvs. om $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$. (2p)

b) Antag att F är periodiskt och låt C_n vara funktionens n:te fourierkoefficient, dvs.

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\, dt.$$

Härled för $n \neq 0$ det samband som råder mellan C_n och funktionen f:s fourierkoefficienter. (2p)

c) Visa slutligen att

$$C_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t f(t)\, dt.$$

(2p)