Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Mattias Enstedt

Prov i matematik
ES & W med flera
Fouriermetoder
2009–01–12

Skrivtid: 14–19. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och "Formelsamling i Fourieranalys". Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.
Jag avser att komma till skrivsalen omkring klockan 16 för att höra om det finns frågor. Läs igenom hela texten till dess och kontrollera att du förstår alla formuleringar. Kontrollera om möjligt dina svar!

Uppgift 1 Låt f vara en 2π-periodisk funktion som ges av $f(t) := t^2$ då $t \in [-\pi, \pi)$. Beräkna den reella fourierserien samt visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Motivera tydligt.
Uppgift 2 Lös differensekvationen

$$u(k+2) - 6u(k+1) + 9u(k) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

givet att $u(0) = 2$ och $u(1) = 9$.
Uppgift 3 Hitta, för $t \geq 0$, en lösning till

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + y(t), \end{cases}$$

givet att $x(0) = 5y(0) = 5$.
Uppgift 4 Beräkna

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{d}x$$

då $u \in L^1(\mathbb{R})$ löser

$$u(x) + \int_{x-1}^{x+1} u(y)\mathrm{d}y = v(x)$$

där $v \in L^1(\mathbb{R})$ uppfyller $\int_{\mathbb{R}} v(x)\mathrm{d}x = C$.
Uppgift 5 Låt $x \in (0,1)$ och $t \in (0, \infty)$. Hitta en funktion, $u(x,t)$, som uppfyller $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ samt $u(0,t) = u(1,t) = 0$ och $u(x,0) = 2\sin^3 \pi x + \sin \pi x \cos \pi x$.