UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2009–01–13

Skrivtid: 09.00 – 14.00

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt bifogade formelsamling.

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

Lösningarna skall vara försedda med förklarande text.

1. Bestäm fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ till funktionen $f(t) = te^{-|t|}$. (5p)

2. Bestäm funktionen f om dess laplacetransform är

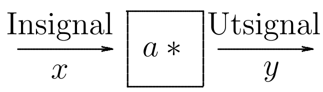
$$\tilde{f}(s) = \frac{s^2+4}{(s-1)(s^2+2s+2)}.$$ (5p)

3. Funktionen $f(t)$ har fouriertransform $\hat{f}(\omega)$. Man definierar en ny funktion g genom att sätta

$$g(t) = (\cos 3t) \cdot f(\tfrac{1}{2}t).$$

Uttryck fouriertransformen $\hat{g}(\omega)$ till g med hjälp av f:s fouriertransform. (5p)

4. Figuren visar en diskret linjär kausal tidsinvariant "svart låda":



För sådana lådor är det generella sambandet mellan insignalen $x = (x_n)_0^\infty$ och utsignalen $y = (y_n)_0^\infty$ en faltning av typen

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k}$$

för någon följd $a = (a_n)_0^\infty$.

När man studerar en viss bestämd sådan låda och skickar in signalen $x = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, får man som resultat ut signalen $y = (2^{-n})_0^\infty$.

a) Bestäm med ledning av detta överföringsfunktionen, dvs. z-transformen $A(z)$ till följden $a = (a_n)_0^\infty$.

b) Bestäm därefter själva följden a. (5p)

5. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) + x(t) = 3e^{t} \\ x'(t) - y'(t) + y(t) = -2e^{-t} \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 2$ och $y(0) = 3$. (6p)

6. Man definierar en funktion f med period 2π genom att sätta

$$f(t) = \pi^2 - t^2 \qquad \text{för } -\pi < t \leq \pi$$

och sedan göra en periodisk utvidgning.

a) Bestäm funktionens fourierserie.
b) Vad har fourierserien för summa för $t = \pi$?
c) Använd resultatet i a) för att beräkna summan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. (8p)

7. Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$u(x,0) = \pi - x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6p)