UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Mattias Enstedt

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2009–06-03

Skrivtid: 14 – 19

Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling samt miniräknare.

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. På varje uppgift kan man erhålla maximalt 8 poäng. Om du tenterar Fouriermetoder (1MA704) ange detta tydligt på tentamen.

Samtliga lösningarna skall vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. Givet $f \in L^1(\mathbb{R})$, hitta en lösning, $u(x,t)$, till

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Bestäm talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ då $a_0 = 0$ och

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2,$$

för alla naturliga tal n.

3. Visa att det existerar ett naturligt tal, n, sådant att det finns en lösning, f, definierad på positiva reella axeln, till

$$\int_0^t \sin(t-u) f(u) \mathrm{d}u = t^n,$$

som uppfyller $\lim_{t \to 0^+} f = 2$.

4. Låt f vara en 2π-periodisk funktion given av

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\pi, 0], \\ t, & t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Beräkna den reella fourierserien samt visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Hitta en funktion, $u(x,t)$, som löser

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1+\cos 3x}{2}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Svar till tentamen i Transformmetoder 2009-06-03

1) $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}} f(x-y)}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{d}y, \quad t > 0$

2) $a_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) –

4) $f \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$

5) $u(x,t) = \frac{1 + e^{-9t} \cos 3x}{2}$