UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf

Svar till tentan i
TRANSFORMMETODER
2011-12-16

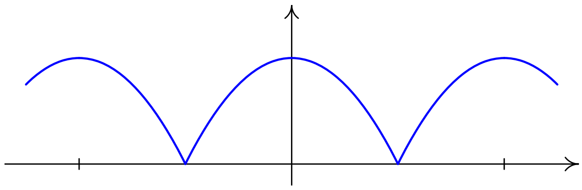
1. $y(t) = \cos t + \sin t$.

2. Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Båda polerna har negativ realdel (nämligen $-\frac{1}{2}$), vilket innebär att systemet är stabilt.

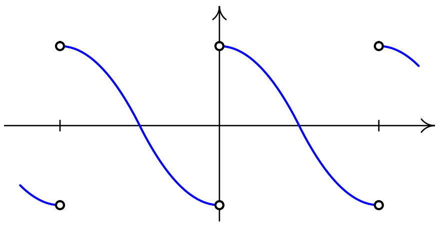
3. (a) Grafen av $f(t)$ ges av



(b) Fourierserien för $f(t)$ ges av

$$f(t) \sim \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos \pi n t$$

4. (a) Grafen för $g(t)$ framgår av



(b) Av de båda graferna framgår att

$$S_f(0) = 1, \qquad S_g(0) = 0, \qquad S_f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{4}, \qquad S_g(\tfrac{3}{2}) = -\tfrac{3}{4}.$$

(c) Då grafen för f har hörn, men inga språng, gäller att fourierkoefficienterna för f har storleksordningen $1/n^2$. För grafen av g gäller att den har språng i de jämna heltalspunkterna. Det följer att g:s fourierkoefficienter är av storleksordningen $1/n$. Fourierkoefficienterna för f går därför snabbare mot noll än fourierkoefficienterna för g.

5. (a) Överföringsfunktionen ges av

$$H(z) = \frac{1}{z+1}$$

Impulssvaret ges av

$$h(n) = 0 \quad \text{då} \quad n \le 0 \quad \text{och} \quad h(n) = (-1)^{n-1} \quad \text{då} \quad n > 0.$$

(b) Systempolen är -1. Eftersom $|-1| \geq 1$ är systemet ostabilt.

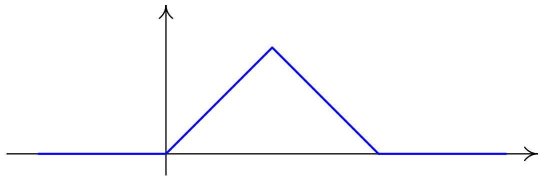
6. Vi har

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.4) och (L.12), ger

$$f(t) = t\,\Theta(t) - 2(t-1)\Theta(t-1) + (t-2)\Theta(t-2)$$

Det betyder att $f(t) = 0$, för $t \leq 0$, $f(t) = t$, för $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = 2 - t$, för $1 \leq t \leq 2$ och $f(t) = 0$, för $2 \leq t$.



7. Eftersom randvillkoren är homogena så har lösningen formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 u(x,0)\, \sin \pi n\, x\, dx = (2)\int_0^1 (x)\, \sin \pi n\, x\, dx \\
&= (2)\left[(x)\,\frac{-\cos \pi n x}{\pi n}\right]_{x=0}^{x=1} - (2)\int_0^1 (1)\,\frac{-\cos \pi n x}{\pi n}\, dx \\
&= \frac{-2\cos \pi n}{\pi n} - 0 = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}
\end{aligned}$$

Alltså har vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}\, e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

8. (a) Med hjälp av (F.12) och (F.6) får vi

$$f(t) = (t)\frac{1}{1+t^2} \sim i\,\frac{d}{d\omega}\left(\pi\, e^{-|\omega|}\right) = -i\pi\, \mathrm{sgn}(\omega)\, e^{-|\omega|} = F(\omega)$$

(b) Av fouriertransformens egenskaper följer

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= iF(1) = i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it}dt \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos t - i\sin t)\, dt = \ (f \text{ är udda}) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\sin t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin t\, dt
\end{aligned}$$