

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogad formelsamling. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng. På varje uppgift kan man få maximalt 5 poäng.

1. Lös med hjälp av laplacetransformen differentialekvationen

$$y'(t) - y(t) = e^t$$

där $y(0) = 1$. (5)

2. Ett LTI-system ges av differentialekvationen

$$2y''(t) + y'(t) - y(t) = x(t)$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och avgör om systemet är stabilt. (5)

3. Låt $g(t)$ vara den *udda* 2-periodiska funktionen som för $0 < t < 1$ ges av $g(t) = t$.

(a) Skissa grafen av $g(t)$ på intervallet $-2 < t < 2$.

(b) Beräkna fourierserien för $g(t)$. (5)

4. *Denna uppgift kan lösas utan beräkning av några fourierkoefficienter!* Låt $g(t)$ vara som i uppgift 3 ovan. Låt $f(t)$ vara den *jämna* 2-periodiska funktionen som för $0 < t < 1$ ges av $f(t) = t$.

(a) Skissa grafen av $f(t)$ på intervallet $-2 < t < 2$.

(b) Mot vilka värden konvergerar de båda fourierserierna (för $g(t)$ respektive $f(t)$) i punkterna $t = 1$ och $t = -\frac{3}{2}$?

(c) För vilken av de två funktionerna avtar fourierkoefficienterna snabbast då $n \rightarrow \infty$? (Med andra ord: Vilken av fourierserierna konvergerar bäst?) (5)

5. Ett LTI-system ges av differensekvationen

$$2y(n+1) - y(n) = x(n)$$

där $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets impulssvar och överföringsfunktion.

(b) Avgör om systemet är stabilt. (5)

6. Bestäm funktionen $f(t)$, $t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(s-1)^2}{s^3 + s} \quad (5)$$

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{e^{-|\omega|} \sin \omega}{\omega}$$

Beräkna $f(0)$ och

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-|\omega|} \sin \omega}{\omega} d\omega \quad (5)$$

8. Lös värmeledningsekvationen

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 1, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & & 0 < x < 1 \end{array} \right\} \quad (5)$$