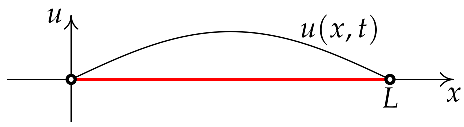
Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Transformmetoder, 5 hp
gyL, IT, W, X
2011-10-26

Sammanfattning av föreläsningarna 11 - 14, 16/11 - 28/11 2012.

Här lär vi oss använda transformer för att lösa vissa partiella differentialekvationer (PDE).

- **Värmeledningsekvationen.** Vi betraktar en stav av längden L, idealiserad som intervallet $0 \leq x \leq L$. Denna är totalt isolerad förutom i ändpunkterna, som hålls vid den konstanta temperaturen 0.



Vi låter $u(x,t)$ beteckna temperaturen i punkten x, i staven, vid tiden t. Om staven har den konstanta värmeledningskoefficienten k gäller då att

$$u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0. \qquad (*)$$

Vi vill finna alla lösningar $u = u(x,t)$ till $(*)$ som uppfyller initialvillkoret $u(x,0) = f(x)$, där $f(x)$, $0 < x < L$, är en mer eller mindre godtycklig funktion.

- **Exempel.** Finn alla värden på a och b, sådana att $u(x,t) = e^{-at}\sin bx$, $0 < x < L$, $t > 0$, är en lösning till $(*)$.

Lösning. Det är klart att $u(0,t) = 0,\ t > 0$. Vi ska även ha

$$0 = u(L,t) = e^{-at}\sin bL \quad \Longleftrightarrow \quad bL = n\pi,\ n = 1,2,\ldots,$$

vilket ger $b = n\pi/L$, $n = 1,2,\ldots$. Antag nu att b är ett av dessa värden. Om $u(x,t) = e^{-at}\sin bx$ har vi $u_t(x,t) = -a\,e^{-at}\sin bx$ och $u_{xx}(x,t) = -b^2e^{-at}\sin bx$. Det betyder att $u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t)$ om och endast om $a = k\,b^2$. För varje positivt heltal n har vi alltså funnit en lösning

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{k\pi^2n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

till $(*)$. □

- **Fouriers metod (variabelseparationsmetoden).** Inspirerade av exemplet försöker vi nu hitta alla lösningar till $(*)$ av formen

$$u(x,t) = X(x)\,T(t), \quad 0 < x < L,\ t > 0.$$

För sådana funktioner har vi $u_t(x,t) = X(x)\,T'(t)$ och $u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$. Alltså är ekvationen $(*)$ uppfylld om och endast om

$$X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad X(0) = X(L) = 0. \tag{\#}$$

En funktion av t är alltså lika med en funktion av x, för alla x och t. Detta kan bara inträffa om båda funktionerna är konstanta. Vi sätter denna konstant till $-\omega^2$ och får

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad X''(x) + \omega^2 X(x) = 0.$$

Dessutom ska $X(0) = X(L) = 0$. Ekvationen $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$ har lösningarna

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

där A, B är godtyckliga konstanter. Villkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger

$$0 = X(0) = A \quad \text{och} \quad 0 = X(L) = B\sin\omega L$$

Om lösningen ska vara icke-trivial så måste $B \neq 0$, vilket ger $\omega L = n\pi$, där $n = 1, 2, \ldots$. Lösningarna utgörs därför av de konstanta multiplarna av

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

För varje n motsvaras $X_n(x)$, enligt (#), av en funktion $T_n(t)$ sådan att

$$\frac{1}{k}\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

Funktionen $T_n(t)$ uppfyller därför differentialekvationen

$$T_n'(t) = -\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}T_n(t)$$

som har lösningarna

$$T_n(t) = b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}$$

där b_n är en godtycklig konstant. Sammantaget har vi alltså, för varje positivt heltal n, funnit lösningarna

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x, \quad 0 < x < L, \ t > 0,$$

till $(*)$. Eftersom $(*)$ är en linjär differentialekvation har den egenskapen att summan av ett (ändligt) antal lösningar också är en lösning. Vi räknar därför med att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x \tag{$**$}$$

är en lösning till $(*)$, förutsatt att serien konvergerar tillräckligt starkt. Vi söker en lösning $u(x,t)$ som uppfyller begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < L$. Om $u(x,t)$ ges av $(**)$ får vi därför, genom att sätta $t = 0$, att

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^0 \sin\frac{\pi n}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{L}x \tag{\#$*$}$$

Högerledet i (#∗) är en udda periodisk funktion, med perioden $2L$. Oavsett hur funktionen $f(x)$ ser ut, för $0 < x < L$, kan vi utvidga den till en udda periodisk funktion, med perioden $2L$, för $-\infty < x < \infty$. Högerledet i (#∗) är Fourierserien för denna utvidgade funktion. Av detta följer att b_n ges av

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{\pi n}{L}\,x\,dx$$

Om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig och sådan att $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ existerar överallt kommer Fourierserien att konvergera överallt och för seriens summa $S(x)$ gäller att $S(x) = f(x)$ i alla kontinuitetspunkter och $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ i övriga punkter. Vi har därmed visat följande

- **Sats.** Om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig och sådan att $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ existerar överallt så har värmeledningsekvationen

  $$u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

  en unik lösning $u(x,t)$ som uppfyller de homogena randvillkoren

  $$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{och begynnelsevillkoret} \quad u(x,0) = f(x).$$

  Denna unika lösning ges av

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t} \sin\frac{\pi n}{L}\,x \tag{S}$$

  där

  $$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{\pi n}{L}\,x\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{FK}$$

  Av (S) ser vi att oavsett hur $u(x,0) = f(x)$ ser ut kommer $u(x,t) \to 0$ då $t \to \infty$. Det är till och med så att temperaturen går mot noll snabbt om k inte ligger nära noll.

- **Exempel.** Lös värmeledningsekvationen i fallet då $L = 2$, $k = 1$, $u(x,0) = 1$ för $0 < x < 2$, och vi har homogena randvillkor $u(0,t) = u(2,t) = 0$, $t > 0$.

  Lösning. Enligt (S) har problemet den unika lösningen

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{4}t} \sin\frac{\pi n x}{2}$$

  där

  $$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (1)\,\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{2}{\pi n}\left(1 - \cos\pi n\right) \end{aligned}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Det betyder att

$$b_{2k} = 0 \qquad \text{och} \qquad b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$$

så vi har

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{4}t} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{2} \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0.$$

$\square$

- **Exempel på inhomogeniteter.** Lös den inhomogena värmeledningsekvationen

$$6x + u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{$*$}$$

där vi har de inhomogena randvillkoren $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 3$ och begynnelsevillkoret $u(x,0) = x^3 + x + 1 + \sin \pi x$.

Lösning. Vid problem av denna typ försöker man hitta en funktion $h(x)$ sådan att

$$u(x,t) = h(x) + v(x,t)$$

och där $v(x,t)$ är en lösning till motsvarande homogena värmeledningsekvation

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{$**$}$$

Av $u(x,t) = h(x) + v(x,t)$ följer att $u_t(x,t) = v_t(x,t)$ och $u_{xx}(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t)$. Det betyder att $(*)$ kan skrivas

$$6x + v_t(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Eftersom vi kräver att $v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)$ följer att $6x = h''(x)$, vilket är ekvivalent med att $h(x) = x^3 + Ax + B$. Vi har därför

$$v(x,t) = u(x,t) - x^3 - Ax - B$$

Kraven att $v(0,t) = v(1,t) = 0$ ger nu

$$0 = v(0,t) = u(0,t) - B = 1 - B \quad \text{och} \quad 0 = v(1,t) = u(1,t) - 1 - A - B = 2 - A - B,$$

vilket ger $A = B = 1$. Om vi sätter $u(x,t) = x^3 + x + 1 + v(x,t)$ kommer $v(x,t)$ att uppfylla $(**)$ och

$$v(x,0) = u(x,0) - x^3 - x - 1 = x^3 + x + 1 + \sin \pi x - x^3 - x - 1 = \sin \pi x.$$

Enligt (S) har vi

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$b_n = (2) \int_0^1 \sin \pi x \, \sin \pi n\, x \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{FK}$$

Genom att använda (FK) ser vi att $b_1 = 1$ och $b_n = 0$ för $n > 1$. Det ser man dock enklare av att

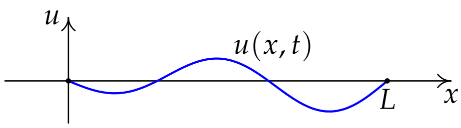
$$\sin \pi x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n\, x = b_1 \sin \pi\, x + b_2 \sin 2\pi\, x + \cdots$$

Alltså har vi

$$u(x,t) = x^3 + x + 1 + e^{-\pi^2 t} \sin \pi\, x.$$

□

- **Vågekvationen.** En annan klassisk PDE är vågekvationen. Denna gäller, till exempel, för en sträng av längden L, i viloläget idealiserad som intervallet $0 \leq x \leq L$, som är fastspänd i ändpunkterna.



Vi låter $u(x,t)$ beteckna strängens vertikala utslag i punkten x, vid tiden t. Om strängen har vågutbredningshastigheten c gäller att

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L,\ t > 0 \quad \text{och} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0. \qquad (*)$$

Eftersom ekvationen är av andra ordningen i variabeln t har vi här två begynnelsevillkor

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{och} \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Vi försöker nu, på samma sätt som vi gjorde med värmeledningsekvationen, hitta alla lösningar till $(*)$ av formen

$$u(x,t) = X(x)\, T(t), \quad 0 < x < L,\ t > 0.$$

För sådana funktioner har vi $u_{tt}(x,t) = X(x)\, T''(t)$ och $u_{xx}(x,t) = X''(x)\, T(t)$. Alltså är ekvationen $(*)$ uppfylld om och endast om

$$X(x)\, T''(t) = c^2\, X''(x)\, T(t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Detta kan skrivas om till

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{och} \quad X(0) = X(L) = 0. \qquad (\#)$$

En funktion av t är alltså lika med en funktion av x, för alla x och t. Detta kan bara inträffa om båda funktionerna är konstanta. Vi sätter denna konstant till $-\omega^2$ och får

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad X''(x) + \omega^2 X(x) = 0.$$

Dessutom ska $X(0) = X(L) = 0$. Ekvationen $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$ har lösningarna

$$X(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

där A, B är godtyckliga konstanter. Villkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger

$$0 = X(0) = A \quad \text{och} \quad 0 = X(L) = B \sin \omega L$$

Om lösningen ska vara icke-trivial så måste $B \neq 0$, vilket ger $\omega L = n\pi$, där $n = 1, 2, \ldots$. Lösningarna utgörs därför av de konstanta multiplarna av

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

För varje n motsvaras $X_n(x)$, enligt (#), av en funktion $T_n(t)$ sådan att

$$\frac{1}{c^2} \frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

Funktionen $T_n(t)$ uppfyller därför differentialekvationen

$$T_n''(t) + \frac{c^2 \pi^2 n^2}{L^2} T_n(t) = 0$$

som har lösningarna

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{\pi c n}{L} t + b_n \sin \frac{\pi c n}{L} t$$

där a_n, b_n är godtyckliga konstanter. Sammantaget har vi alltså, för varje positivt heltal n, funnit lösningarna

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{\pi c n}{L} t + b_n \sin \frac{\pi c n}{L} t \right) \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad 0 < x < L, \; t > 0,$$

till $(*)$. Eftersom $(*)$ är en linjär differentialekvation har den egenskapen att summan av ett (ändligt) antal lösningar också är en lösning. Vi räknar därför med att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi c n}{L} t + b_n \sin \frac{\pi c n}{L} t \right) \sin \frac{\pi n}{L} x, \tag{$**$}$$

är en lösning till $(*)$, förutsatt att serien konvergerar tillräckligt starkt. Vi söker en lösning $u(x,t)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $0 < x < L$. Om $u(x,t)$ ges av $(**)$ får vi därför, genom att sätta $t = 0$, att

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{$\#*$}$$

Högerledet i $(\#*)$ är en udda periodisk funktion, med perioden $2L$. Oavsett hur funktionen $f(x)$ ser ut, för $0 < x < L$, kan vi utvidga den till en udda periodisk funktion, med perioden $2L$, för $-\infty < x < \infty$. Högerledet i $(\#*)$ är Fourierserien för denna utvidgade funktion. Av detta följer att b_n ges av

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n}{L} x \, dx$$

Om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig och sådan att $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ existerar överallt kommer Fourierserien att konvergera överallt och för seriens summa $S(x)$ gäller att $S(x) = f(x)$ i alla kontinuitetspunkter och $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ i övriga punkter.

På samma sätt får vi

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi c n}{L}\, b_n \sin \frac{\pi n}{L}\, x \tag{$*\#$}$$

Högerledet i ($*$#) är en udda periodisk funktion, med perioden $2L$. Oavsett hur funktionen $g(x)$ ser ut, för $0 < x < L$, kan vi utvidga den till en udda periodisk funktion, med perioden $2L$, för $-\infty < x < \infty$. Högerledet i ($*$#) är Fourierserien för denna utvidgade funktion. Av detta följer att b_n ges av

$$b_n = \frac{L}{\pi c n}\, \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, \sin \frac{\pi n}{L}\, x\, dx$$

Om $g(x)$ är styckvis kontinuerlig och sådan att $g(x^+)$, $g(x^-)$, $g'_+(x)$, $g'_-(x)$ existerar överallt kommer Fourierserien att konvergera överallt och för seriens summa $S(x)$ gäller att $S(x) = g(x)$ i alla kontinuitetspunkter och $S(x) = \frac{1}{2}\left(g(x^+) + g(x^-)\right)$ i övriga punkter.

- **Exempel.** Lös vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & u_t(x,0) = 8\cos x \sin^3 x, & 0 < x < \pi \end{array} \right\}$$

Lösning. Här har vi $L = \pi$ och $c = 1$. Enligt ovan har därför ekvationen den allmänna lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,t + b_n \sin n\,t) \sin n\,x, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

som uppfyller de homogena randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Begynnelsevillkoren

$$\begin{aligned} \sin x = u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\,x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ 2\sin 2x - \sin 4x = u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin n\,x \\ &= b_1 \sin x + 2b_2 \sin 2x + 3b_3 \sin 3x + 4b_4 \sin 4x + \cdots, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat likheten $8\cos x \sin^3 x = 2\sin 2x - \sin 4x$, ger sedan

$$a_1 = b_2 = 1,\ b_4 = -\frac{1}{4}, \quad 0 = a_n,\ n > 1, \quad 0 = b_1 = b_3 = b_n,\ n > 4.$$

Ekvationen har därför lösningen

$$u(x,t) = \cos t\ \sin x + \sin 2t\ \sin 2x - \frac{1}{4}\ \sin 4t\ \sin 4x.$$

□

- **Exempel med inhomogeniteter.** Lös följande inhomogena variant av vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) + \sin x, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = \pi, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & u_t(x,0) = 4\cos^2 x \sin x, & 0 < x < \pi \end{array} \right\}$$

Lösning. Vi ansätter $u(x,t) = h(x) + v(x,t)$, där vi vill att $v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t)$ och $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$. Då gäller $u_{xx}(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t)$ och $u_{tt}(x,t) = v_{tt}(x,t)$. Differentialekvationen kan därför skrivas som

$$h''(x) + v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t) + \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

vilket ger $h''(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$. Denna ekvation har lösningen $h(x) = Ax + B - \sin x$. För randvillkoren har vi

$$\begin{aligned} 0 &= u(0,t) = h(0) + v(0,t) = h(0) = B \\ \pi &= u(\pi,t) = h(\pi) + v(\pi,t) = h(\pi) = A\pi + \sin \pi = A\pi, \end{aligned}$$

vilket ger $A = 1$, $B = 0$, $h(x) = x - \sin x$ och $v(x,t) = u(x,t) - x + \sin x$. För begynnelsevillkoren gäller därför

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - x + \sin x = x - x + \sin x = \sin x \\ v_t(x,0) &= u_t(x,0) = 4\cos^2 x \sin x = \sin x + \sin 3x \end{aligned}$$

Det betyder att $v(x,t)$ uppfyller den homogena vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t), & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ v(0,t) = 0, & v(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = \sin x, & v_t(x,0) = \sin x + \sin 3x, & 0 < x < \pi \end{array} \right\}$$

Ekvationens allmänna lösning är

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,t + b_n \sin n\,t) \sin n\,x, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0.$$

Av denna följer att

$$\begin{aligned} v(x,0) = \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\,x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots, \\ v_t(x,0) = \sin x + \sin 3x &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,b_n \sin n\,x = b_1 \sin x + 2b_2 \sin 2x + 3b_3 \sin 3x + \cdots, \end{aligned}$$

vilket ger

$$a_1 = 1, \ a_n = 0, \ n > 1, \quad b_1 = 1, \ b_3 = \tfrac{1}{3}, \ b_2 = b_n = 0, \ n > 3.$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned} v(x,t) &= (\cos t + \sin t) \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3t \, \sin 3x \\ u(x,t) &= x + (-1 + \cos t + \sin t) \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3t \, \sin 3x. \end{aligned}$$

$\square$

Nedan tittar vi närmare på lösningarna till värmelednings- och vågekvationerna och löser exempel på inhomogena varianter av dessa ekvationer.

- **Lösningarna till värmeledningsekvationen.** För systemet

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_t(x,t)=k\,u_{xx}(x,t), & 0<x<L, & t>0 \\ u(0,t)=0, & u(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=f(x), & & 0<x<L \end{array}\right\}$$

(där $f(x)$ utvidgats till en udda $2L$-periodisk funktion) har vi funnit den unika lösningen

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x \tag{S}$$

där

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{\pi n}{L}x\,dx, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{FK}$$

och

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{L}x$$

För varje $t>0$ gäller att termerna

$$u_n(x,t)=b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x,$$

i (S), går mycket snabbt mot noll då $n\to\infty$, vilket medför att $u(x,t)$ har kontinuerliga derivator av alla ordningar med avseende på både x och t. Exempelvis har vi

$$u_{xtt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{L}\left(\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}\right)^2 b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\frac{\pi n}{L}x$$

(u_{xtt} betyder att vi deriverat en gång med avseende på x och två gånger med avseende på t, i vilken ordning som helst).

Att $u(x,t)\to 0$ då $t\to\infty$ $(0<x<L)$ följer av att $|u_n(x,t)|$ avtar exponentiellt mot 0 då $t\to\infty$.

Det är litet svårare att förstå att $u(x,t)$ ligger nära $u(x,0)=f(x)$, då t är ett litet positivt tal. Vi har

$$u(x,0)-u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(1-e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x \tag{$*$}$$

Det är klart att varje term

$$b_n\left(1-e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}t}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x,$$

i ($*$), går mot noll då $t\to 0^+$ $(1-e^0=0)$. Men att en oändlig summa av sådana termer går mot noll är långt ifrån uppenbart (eller ens sant).

Man kan visa att om $\sum|b_n|<\infty$ så gäller att $u(x,t)\to u(x,0)$ då $t\to 0^+$. I tillämpningarna gäller normalt att $f(x)$ är kontinuerlig för $0\le x\le L$, $f(0)=f(L)=0$ och derivatorna $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ existerar överallt. Då vet vi att b_n är av storleksordningen n^{-2}, i vilket fall $\sum|b_n|<\infty$ och vi kan vara säkra på att $u(x,t)\to u(x,0)$ då $t\to 0^+$.

- **Lösningarna till vågekvationen.** Vi har sett att systemet

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_{tt}(x,t) = c^2\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < L \end{array}\right\}$$

(där $f(x), g(x)$ utvidgats till udda $2L$-periodiska funktioner) har den unika lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi c n}{L}\, t + b_n \sin \frac{\pi c n}{L}\, t \right) \sin \frac{\pi n}{L}\, x,$$

där

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, \sin \frac{\pi n}{L}\, x\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{L}\, x$$

$$b_n = \frac{L}{\pi c n}\, \frac{2}{L} \int_0^L g(x)\, \sin \frac{\pi n}{L}\, x\, dx$$

och

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi c n}{L}\, b_n \sin \frac{\pi n}{L}\, x$$

Observera att $u(x,t)$ är periodisk i båda variablerna x och t. Närmare bestämt gäller att

$$u(x+2L,t) = u(x,t) = u\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < t < \infty.$$

Vi såg att lösningarna till värmeledningsekvationen går att derivera hur många gånger som helst (för $0 < x < L,\ t > 0$) oavsett hur $u(x,0) = f(x)$ ser ut. Lösningarna $u(x,t)$, till vågekvationen, uppvisar normalt inte samma höga regularitet. Om grafen av $u(x,0) = f(x)$ ($u_t(x,0) = g(x)$), $0 < x < L$, har hörn kommer detsamma att gälla för grafen av $u(x,t)$ ($u_t(x,t)$), $0 < x < L$.

På samma sätt som för värmeledningsekvationen är det inte helt lätt att avgöra om $u(x,t)$ ligger nära $u(x,0) = f(x)$ och $u_t(x,t)$ ligger nära $u_t(x,0) = g(x)$, då $t > 0$ ligger nära noll. Vi har

$$u(x,0) - u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (1 - \cos \frac{\pi c n}{L}\, t) - b_n \sin \frac{\pi c n}{L}\, t \right) \sin \frac{\pi n}{L}\, x \qquad (*)$$

$$u_t(x,0) - u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi c n}{L}\, a_n \sin \frac{\pi c n}{L}\, t + \frac{\pi c n}{L}\, b_n (1 - \cos \frac{\pi c n}{L}\, t) \right) \sin \frac{\pi n}{L}\, x \qquad (\#)$$

Det är klart att varje term

$$\left(a_n (1 - \cos \frac{\pi c n}{L}\, t) - b_n \sin \frac{\pi c n}{L}\, t \right) \sin \frac{\pi n}{L}\, x$$

och

$$\left(\frac{\pi c n}{L}\, a_n \sin \frac{\pi c n}{L}\, t + \frac{\pi c n}{L}\, b_n (1 - \cos \frac{\pi c n}{L}\, t) \right) \sin \frac{\pi n}{L}\, x$$

i $(*)$ respektive (#), går mot noll då $t \to 0^+$. Men att en oändlig summa av sådana termer går mot noll är långt ifrån uppenbart (eller ens sant).

Man kan visa att om

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n| < \infty \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n| < \infty$$

så gäller att $u(x,0) - u(x,t) \to 0$ och $u_t(x,0) - u_t(x,t) \to 0$ då $t \to 0^+$.

- **Exempel.** Vi betraktar en homogen vägg, med tjockleken L och värmeledningskoefficienten k.

För väggens temperatur $u(x,t)$ gäller att $u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t)$, $u(x,0) = 0 = u(0,t)$, $0 < x < L$, $t > 0$, och $u(L,t) = C$, $t > 0$. Vår uppgift är att bestämma $u(x,t)$ för $0 < x < L$, $t > 0$, och även beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

Lösning. Vi ska alltså lösa systemet

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = C, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & & 0 < x < L \end{array} \right\}$$

På grund av det inhomogena randvillkoret $u(L,t) = C$, $t > 0$, ansätter vi

$$u(x,t) = h(x) + v(x,t) \quad \Longleftrightarrow \quad v(x,t) = u(x,t) - h(x)$$

där $v(x,t)$ är lösningen till motsvarande homogena system

$$\left\{ \begin{array}{ccc} v_t(x,t) = k\,v_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & t > 0 \\ v(0,t) = 0, & v(L,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = f(x) = -h(x), & & 0 < x < L \end{array} \right\}$$

Då gäller

$$0 = k\,u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = k\,h''(x) + k\,v_{xx}(x,t) - v_t(x,t) = k\,h''(x),$$

vilket ger $h(x) = Ax + B$, $u(x,t) = Ax + B + v(x,t)$. Randvillkoren ger

$$0 = u(0,t) = B \quad \text{och} \quad C = u(L,t) = AL.$$

Alltså har vi $h(x) = \dfrac{Cx}{L}$, $0 < x < L$. För $v(x,t)$ gäller att

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}\,t} \sin \frac{\pi n}{L}\,x$$

där

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{\pi n}{L}\,x\,dx = -\frac{2}{L}\int_0^L \frac{Cx}{L}\sin\frac{\pi n}{L}\,x\,dx \\ &= \frac{2}{L}\left[\frac{Cx}{L}\frac{\cos\frac{\pi n}{L}\,x}{\frac{\pi n}{L}}\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{2}{L}\int_0^L \frac{C}{L}\frac{L}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{L}\,x\,dx \\ &= \frac{2}{L}\frac{CL}{L}\frac{L}{\pi n}\cos\pi n + 0 = \frac{2C(-1)^n}{\pi n}, \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Av detta följer att

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C(-1)^n}{\pi n}\,e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}\,t}\sin\frac{\pi n}{L}\,x$$

och

$$u(x,t) = \frac{Cx}{L} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{L^2}\,t}\sin\frac{\pi n}{L}\,x$$

Det framgår att

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{Cx}{L} - 0 = \frac{Cx}{L}, \quad 0 < x < L.$$

Funktionen

$$u_\infty(x,t) = \frac{Cx}{L}, \quad 0 < x < L,$$

som inte beror på t, sägs vara den stationära lösningen till systemet

$$\left\{\begin{array}{cc} u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = C, \quad t > 0 \end{array}\right\}$$

Hur begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ än ser ut kommer $u(x,t) \to u_\infty(x,t)$ då $t \to \infty$.

För en vägg med arean A ger den stationära temperaturfördelningen värmetransporten

$$-kA\,\frac{\partial u_\infty(x,t)}{\partial x} = -\frac{kAC}{L}$$

(åt vänster, på grund av minustecknet) genom väggen. För att minska vedåtgången kan man alltså isolera väggen bättre (minska k), nöja sig med lägre temperatur (minska C) eller öka väggtjockleken L (tilläggsisolera). □

- Vi tittade även på exemplet med en inhomogen vågekvation, som du hittar i slutet av föreläsning 10.

- **Z-transformen.** Laplacetransformen av en signal $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, (där normalt $f(t) = 0$ för $t < 0$) ges av

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt \qquad (\#)$$

I datorernas diskreta värld går det inte arbeta med kontinuerlig tid så man samplar $f(t)$ vid tidpunkterna $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$ (heltalen). Om T är ett litet positivt tal och $f(t)$ är hygglig så är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,e^{-snT}T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)\,\left(e^{sT}\right)^{-n}$$

en approximation av $F(s)$. Sätter vi här $z = e^{sT}$ och $x(n) = Tf(nT)$ så får vi summan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,z^{-n}$$

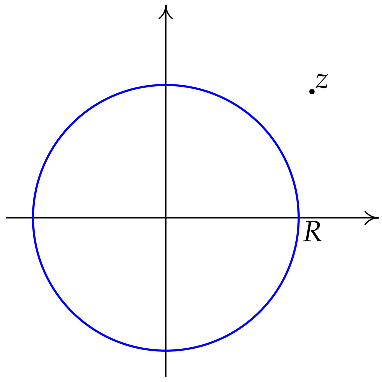
Denna betraktelse leder oss till att definiera den så kallade z-transformen $X(z)$, av en följd $x(n),\ n \in \mathbb{Z}$, genom

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,z^{-n} \quad \text{(anges som } x(n) \sim X(z)\text{)} \tag{$**$}$$

Om inget annat sägs antar vi här alltid att $x(n) = 0$ för $n < 0$. Då kan $(**)$ skrivas

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \cdots \tag{$*$}$$

Funktionen $X(z)$ är definierad för alla komplexa tal z, för vilka serien konvergerar (och funktionsvärdet $X(z)$ är lika med seriens summa). Det visar sig att till varje följd $x(n)$ hör ett tal R, $0 \le R \le \infty$, sådant att $X(z)$ är definierad då $|z| > R$, men inte definierad då $|z| < R$.



För $|z| > R$ är $X(z)$ obegränsat deriverbar och derivatan $X^{(k)}(z)$ fås genom att derivera serien i $(*)$ termvis k gånger. Exempelvis

$$X'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)x(n)\,z^{-n-1} = -\frac{x(1)}{z^2} - \frac{2x(2)}{z^3} - \frac{3x(3)}{z^4} + \cdots$$

$$X''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n)(n+1)x(n)\,z^{-n-2} = \frac{(2)x(1)}{z^3} + \frac{(2)(3)x(2)}{z^4} + \frac{(3)(4)x(3)}{z^5} + \cdots$$

- **Exempel.** Vi påminner om att vår definition av Heavisidefunktionen är att $\Theta(t) = 0$, för $t < 0$, och $\Theta(t) = 1$, för $t \ge 0$. Beräkna z-transformen av $x(n) = \Theta(n),\ n \in \mathbb{Z}$.

  Lösning. Enligt $(*)$ får vi

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \cdots \\ &= \text{(geometrisk serie)} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned} \tag{Z.8}$$

$\square$

- **Exempel.** Antag att $x(n) \sim X(z)$ och att $y(n) = x(n)\lambda^n$, där λ är ett nollskilt komplext tal. Bestäm $Y(z)$.

  Lösning. Enligt ($*$) får vi

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\, z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)\lambda}{z} + \frac{x(2)\lambda^2}{z^2} + \frac{x(3)\lambda^3}{z^3} + \cdots \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{\frac{z}{\lambda}} + \frac{x(2)}{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^2} + \frac{x(3)}{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^3} + \cdots \\ &= X\left(\frac{z}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{Z.2}$$

  Speciellt får vi att

$$\lambda^n = \Theta(n)\,\lambda^n \sim \frac{\frac{z}{\lambda}}{\frac{z}{\lambda} - 1} = \frac{z}{z-\lambda} \tag{Z.9}$$

$\square$

- **Räkneregler för Z-transformen.** Om inget annat sägs så antar vi, som sagt, att varje följd $x(n)$ är definierad för $n \in \mathbb{Z}$ och $x(n) = 0$ för stora (normalt alla) negativa n.

  - **Linearitet.**

$$a\,x(n) + b\,y(n) \sim a\,X(z) + b\,Y(z)$$

    Bevis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\,x(n) + b\,y(n))z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} = a\,X(z) + b\,Y(z)$$

$\square$

  - **Fördröjning (högerskift).**
    Om $y(n) = x(n-1),\ n \in \mathbb{Z}$, så gäller $Y(z) = z^{-1}X(z)$.

    Bevis.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-1)\, z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-m-1} = z^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-m} = z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

$\square$

  - **Negativ fördröjning (vänsterskift).**
    Om $y(n) = x(n+1),\ n \in \mathbb{Z}$, så gäller $Y(z) = z\,X(z)$.

    Bevis. Följer direkt av ovanstående. $\square$

  - **Huggskift.**
    Om $x(n)\Theta(n) \sim X(z)$ och $y(n) = x(n+1)\Theta(n)$ så gäller $Y(z) = z\,X(z) - z\,x(0)$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)\, z^{-n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)\, z^{-n-1} = z \sum_{m=1}^{\infty} x(m)\, z^{-m} \\
&= z \left(-x(0) + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)\, z^{-m} \right) = -z\, x(0) + z\, X(z)
\end{aligned}$$

□

– **Multiplikation med n.**
Om $y(n) = n\, x(n),\ n \in \mathbb{Z}$, så gäller $Y(z) = -z\, X'(z)$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x(n)\, z^{-n} \\
&= (-z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\, x(n)\, z^{-n-1} = (-z) \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \\
&= -zX'(z)
\end{aligned}$$

□

- **Exempel.** Med hjälp av ovanstående visar man lätt följande:

  –
  $$n\, \lambda^n = \Theta(n)\, n\, \lambda^n \sim \frac{\lambda\, z}{(z-\lambda)^2} \tag{Z.11}$$

  –
  $$n^2 \lambda^n = \Theta(n)\, n^2 \lambda^n \sim \frac{\lambda^2 z + \lambda\, z^2}{(z-\lambda)^3}$$

  –
  $$n^3 \lambda^n = \Theta(n)\, n^3 \lambda^n \sim \frac{\lambda^3 z + 4\lambda^2 z^2 + \lambda\, z^3}{(z-\lambda)^4}$$

  –
  $$n^4 \lambda^n = \Theta(n)\, n^4 \lambda^n \sim \frac{\lambda^4 z + 11\lambda^3 z^2 + 11\lambda^2 z^3 + \lambda\, z^4}{(z-\lambda)^5}$$