Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Sammanfattning av föreläsningarna 15 - 18, 30/11 - 12/12 2012.

Z-transformen ska avslutas och sedan blir det tentaförberedelser.

- **Inversa z-transformen (primitiv variant).** Ur transformen

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \cdots \qquad (*)$$

kan vi, i tur och ordning, få fram $x(n),\ n \geq 0$, genom

$$\begin{aligned}
x(0) &= \lim_{z\to\infty} X(z) \\
x(1) &= \lim_{z\to\infty} z\,(X(z) - x(0)) \\
x(2) &= \lim_{z\to\infty} z^2 (X(z) - x(0) - x(1)\, z^{-1}) \\
x(3) &= \lim_{z\to\infty} z^3 (X(z) - x(0) - x(1)\, z^{-1} - x(2)\, z^{-2}) \\
&\cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Proceduren fungerar om $X(z) = T(z)/N(z)$, där $T(z), N(z)$ är polynom och $T(z)$ har högst samma grad som $N(z)$. Om $T(z)$ har högre grad än $N(z)$ så gäller inte att $x(n) = 0$ för $n < 0$, i vilket fall proceduren får modifieras (det är lätt att se hur, eller hur?). Beräkningen görs enklast med följande schema:

$$\begin{aligned}
X_0(z) &= X(z), & x(0) &= \lim_{z\to\infty} X_0(z) \\
X_1(z) &= z\,(X_0(z) - x(0)), & x(1) &= \lim_{z\to\infty} X_1(z) \\
X_2(z) &= z\,(X_1(z) - x(1)), & x(2) &= \lim_{z\to\infty} X_2(z) \\
X_3(z) &= z\,(X_2(z) - x(2)), & x(3) &= \lim_{z\to\infty} X_3(z) \\
&\cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

- **Exempel.** Bestäm, med ovanstående metod, $x(n),\ n \geq 0$ om $X(z) = \dfrac{z}{z-\lambda}$.

Lösning. Vi får

$$\begin{aligned}
X_0(z) &= \frac{z}{z-\lambda}, & x(0) &= \lim_{z\to\infty} X_0(z) = 1 \\
X_1(z) &= z\,(X_0(z) - 1) = \frac{\lambda\, z}{z-\lambda}, & x(1) &= \lim_{z\to\infty} X_1(z) = \lambda \\
X_2(z) &= z\,(X_1(z) - \lambda) = \frac{\lambda^2\, z}{z-\lambda}, & x(2) &= \lim_{z\to\infty} X_2(z) = \lambda^2 \\
X_3(z) &= z\,(X_2(z) - \lambda^2) = \frac{\lambda^3\, z}{z-\lambda}, & x(3) &= \lim_{z\to\infty} X_3(z) = \lambda^3 \\
&\cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Alltså gäller, som förväntat, $x(n) = \lambda^n$, $n \geq 0$. $\square$

- **Exempel.** Bestäm $x(n)$, $n \geq 0$ om $X(z) = \dfrac{1}{z-\lambda}$.

  Lösning. Enligt ovan gäller att $zX(z) = z\,(z-\lambda)^{-1}$ är z-transformen av $\Theta(n)\,\lambda^n$. Fördröjningsregeln ger att $x(n) = \Theta(n-1)\,\lambda^{n-1}$. $\square$

- **Inversa z-transformen igen.** En mindre primitiv metod att inverstransformera $X(z) = A_0 + T(z)/N(z)$, där $T(z), N(z)$ är polynom och $T(z)$ har lägre grad än $N(z)$, ges av följande: Antag att
$$\frac{T(z)}{N(z)} = \frac{T(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_p)}$$
där vi, för enkelhets skull, antar att $z_1, z_2, \ldots, z_p$ är distinkta (olika). $X(z)$ har då partialbråksuppdelningen
$$X(z) = A_0 + \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_p}{z-z_p}$$
Av föregående exempel ser vi att $A_k(z-z_k)^{-1} \sim A_k\Theta(n-1)\,z_k^{n-1}$. Det betyder att
$$x(0) = A_0 \quad \text{och} \quad x(n) = \Theta(n-1)\left(A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} + \cdots + A_p z_p^{n-1}\right), \quad n > 0.$$
Om $N(z)$ har multipla nollställen så gör man på samma sätt, fast det blir en aning mer komplicerat. Partialbråksutvecklingen innehåller då termer av typen $A(z-z_k)^{-m-1}$, $m \geq 0$. Enligt (Z.13), som vi inte härleder, gäller att
$$\frac{z}{(z-\lambda)^{m+1}} \quad \sim \quad \Theta(n)\binom{n}{m}\lambda^{n-m}, \quad -\infty < n < \infty.$$
Fördröjningsformeln ger sedan
$$Y(z) = \frac{1}{(z-z_k)^{m+1}} \quad \sim \quad y(n) = \Theta(n-1)\binom{n-1}{m} z_k^{n-m-1}, \quad -\infty < n < \infty.$$
Observera att $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, $\binom{\alpha}{2} = \dfrac{(\alpha)(\alpha-1)}{2}$, $\ldots$, för varje $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **LTI-system i diskret tid.** Ett sådant, med insignalen $x(n)$ och utsignalen $y(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, ges, till exempel, av en differensekvation
$$y(n+p) + a_{p-1}y(n+p-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = K\,x(n), \quad -\infty < n < \infty, \ (*)$$
där $x(n) = y(n) = 0$ för $n < 0$. Av $(*)$ följer att $y(0) = \cdots = y(p-1) = 0$, $y(p) = K\,x(0)$ o.s.v. Genom att z-transformera $(*)$ får vi
$$(z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0)Y(z) = K\,X(z),$$
där $y(n) \sim Y(z)$. För en given insignal $x(n)$ ges alltså utsignalen av
$$Y(z) = \frac{K}{z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0}\,X(z) = H(z)\,X(z).$$

Funktionen $H(z)$ är systemets överföringsfunktion. Om $h(n)$ är inversa z-transformen av $H(z)$ så gäller att $y(n)$ fås som faltningen

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \cdots + h(0)x(n) = \sum_{j=0}^{n} h(n-j)\,x(j) \qquad (\#)$$

- **Impulssvar och stabilitet.** Impulsen är funktionen (följden, signalen) $\delta(n)$, som ges av att $\delta(0) = 1$ och $\delta(n) = 0$ för $n \neq 0$. Z-transformen av impulsen är $\Delta(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Av (#) ser vi att om $x(n) = \delta(n)$ så får vi

  $$y(n) = h(n) * \delta(n) = h(n)\delta(0) + h(n-1)\delta(1) + \cdots + h(0)\delta(n) = h(n)$$

  Det är anledningen till att $h(n)$ kallas för impulssvaret. Impulssvaret har z-transformen

  $$H(z) = \frac{K}{z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{K}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_p)}$$

  Nämnarens nollställen $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sägs vara systemets poler.

  LTI-systemet, som ges av $(*)$, definieras som stabilt om varje begränsad insignal resulterar i en begränsad utsignal ($|x(n)| \leq C_1 \Rightarrow |y(n)| \leq C_2$). I överensstämmelse med vad vi fick för tidskontinuerliga system så gäller att systemet är stabilt om och endast om $\sum |h(n)| < \infty$. Om systemet har enkla poler ($z_1, z_2, \ldots, z_p$ är distinkta) så har $H(z)$ partialbråksutvecklingen

  $$H(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_p}{z-z_p}$$

  och impulssvaret ges av

  $$h(n) = \Theta(n-1)\left(A_1 z_1^{n-1} + A_2 z_2^{n-1} + \cdots + A_p z_p^{n-1}\right).$$

  Av detta följer genast att systemet är stabilt om och endast om alla poler har absolutbelopp mindre än ett ($|z_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, p$). Detsamma gäller även om systemet har multipla poler.

- **Exempel.** För vilka $a \in \mathbb{R}$ gäller att systemet, som ges av

  $$y(n+2) + 2ay(n+1) + y(n) = x(n), \qquad -\infty < n < \infty,$$

  är stabilt?

  Lösning. Här är överföringsfunktionen

  $$H(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2},$$

  där z_1, z_2 är polerna. Alltså gäller att $z_1 z_2 = 1$. Det är därför omöjligt att båda polerna har absolutbelopp mindre än ett. Systemet är därför ostabilt för alla värden på a. $\square$

- **Exempel.** Avgör om systemet, som ges av

  $$4y(n+2) + 4y(n+1) + y(n) = x(n), \qquad -\infty < n < \infty,$$

  är stabilt?

Lösning. Här är överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{4z^2 + 4z + 1} = \frac{1}{(2z+1)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2},$$

så polerna är $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2}$. Båda polerna har absolutbelopp mindre än ett. Systemet är därför stabilt. $\square$

- **Exempel.** För vilka $a \in \mathbb{R}$ gäller att systemet, som ges av

$$y(n+2) + 2ay(n+1) + \tfrac{1}{5}\,y(n) = x(n), \qquad -\infty < n < \infty,$$

är stabilt?

Lösning. Här är överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + \frac{1}{5}}$$

Polerna z_1, z_2 är alltså rötterna till andragradsekvationen $z^2 + 2az + \frac{1}{5} = 0$, som kan omskrivas till $(z+a)^2 = a^2 - \frac{1}{5}$.

Om $a^2 - \frac{1}{5} < 0$ så har vi polerna $z_1 = \overline{z}_2 = -a + i\sqrt{\frac{1}{5} - a^2}$ med absolutbeloppen $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{1}{5}} < 1$.

Om $a^2 - \frac{1}{5} \geq 0$ så har vi polerna $z_1, z_2 = -a \pm \sqrt{a^2 - \frac{1}{5}}$. Det största av absolutbeloppen av polerna är $|a| + \sqrt{a^2 - \frac{1}{5}}$. Vi har $|a| + \sqrt{a^2 - \frac{1}{5}} < 1$ om och endast om

$$\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{5}} < 1 - |a| \Leftrightarrow a^2 - \tfrac{1}{5} < (1 - |a|)^2 = a^2 - 2|a| + 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{5} > 2|a| - 1 \Leftrightarrow |a| < \tfrac{3}{5}.$$

Sammantaget betyder detta att systemet är stabilt om och endast om $|a| < \frac{3}{5}$. $\square$

- **Exempel.** Bestäm z-transformen, $A(z)$, av $a_n = \dfrac{\Theta(n-2)}{2^{n+1}}$.

Lösning. Vi har här

$$a_n = \frac{1}{2^3}\,\frac{\Theta(n-2)}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\,\Theta(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

vilket ger

$$a_{n+2} = \frac{1}{8}\,\Theta(n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sim \frac{1}{8}\,\frac{z}{z - \frac{1}{2}},$$

enligt (Z.9). Enligt (Z.3) får vi sedan

$$a_n \sim A(z) = (z^{-2})\,\frac{1}{8}\left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{z\,(z - \frac{1}{2})}$$

$\square$

- **Differensekvationer.** Antag att $x(n),\ n \geq 0$, är en given följd och att vi söker alla följder $y(n),\ n \geq 0$, sådana att

$$y(n+p) + a_{p-1}y(n+p-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = x(n), \quad 0 \leq n < \infty, \qquad (*)$$

Vi kan då välja godtyckliga värden på $y(0), y(1), \ldots, y(p-1)$ och för varje val har $(*)$ en entydig lösning $y(n),\ n \geq 0$. Detta visas med induktion. Man löser $(*)$ genom att z-transformera båda leden under iakttagande av (Z.4). Vi får då

$$-S(z) + (z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0)Y(z) = X(z)$$

där $x(n) \sim X(z), y(n) \sim Y(z)$ och

$$S(z) = y(0)z^p + (y(1) + a_{p-1}y(0))\, z^{p-1} + \cdots + (y(p-1) + a_{p-1}y(p-2) + \cdots + a_0 y(0))z^0$$

Det följer att

$$Y(z) = \frac{S(z) + X(z)}{z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

och $y(n),\ n \geq 0$, fås sedan genom inverstransformering.

- **Exempel.** Bestäm $y(n),\ n \geq 0$, om $y(0) = 0, y(1) = 2$ och

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = (2n+5)\, 2^{n+1} = x(n), \qquad 0 \leq n < \infty. \qquad (*)$$

Lösning. Det är lämpligt att göra omskrivningen

$$x(n) = (2n+5)\, 2^{n+1} = n\, 2^{n+2} + 5\, 2^{n+1} = 4n\, 2^n + 10\, 2^n$$

Z-transformering av $(*)$, med hjälp av (Z.4), (Z.11) och (Z.9), ger sedan

$$z^2 Y(z) - 2z - 3zY(z) + 2Y(z) = \frac{8z}{(z-2)^2} + \frac{10z}{z-2} = \frac{8z + 10z(z-2)}{(z-2)^2} = \frac{10z^2 - 12z}{(z-2)^2}$$

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = 2z + \frac{10z^2 - 12z}{(z-2)^2} = \frac{2z(z^2 + z - 2)}{(z-2)^2}$$

$$Y(z) = \frac{2z(z^2 + z - 2)}{(z^2 - 3z + 2)(z-2)^2} = \frac{2z(z-1)(z+2)}{(z-1)(z-2)(z-2)^2} = \frac{2z^2 + 4z}{(z-2)^3}$$

Kombinerar vi (Z.2) och (Z.12) så får vi

$$\Theta(n) n^2 \lambda^n \sim \frac{(\frac{z}{\lambda})^2 + (\frac{z}{\lambda})}{(\frac{z}{\lambda} - 1)^3} = \frac{\lambda z^2 + \lambda^2 z}{(z-\lambda)^3}$$

Sätter vi här $\lambda = 2$ så får vi

$$\Theta(n) n^2 2^n \sim \frac{2z^2 + 4z}{(z-\lambda)^3},$$

Det följer genast att $y(n) = n^2 2^n,\ n \geq 0$. $\square$

- **Exempel.** Låt $c = a + ib = r\, e^{i\varphi},\ a, b \in \mathbb{R}$. Härled, med hjälp av (Z.2), (Z.14) och (Z.15), z-transformerna av $\Theta(n)\, r^n \cos n\varphi$ och $\Theta(n)\, r^n \sin n\varphi$.

Lösning. (Z.14) och (Z.15) ger direkt att

$$\Theta(n)\ \cos n\varphi \sim \frac{z^2 - z\cos\varphi}{z^2 - 2z\cos\varphi + 1} \quad \text{och} \quad \Theta(n)\ \sin n\varphi \sim \frac{z\sin\varphi}{z^2 - 2z\cos\varphi + 1}$$

Med hjälp av (Z.2) får vi sedan

$$\Theta(n)\, r^n \cos n\varphi \sim \frac{(z/r)^2 - (z/r)\cos\varphi}{(z/r)^2 - 2(z/r)\cos\varphi + 1} = \frac{z^2 - zr\cos\varphi}{z^2 - 2zr\cos\varphi + r^2} = \frac{z(z-a)}{(z-a)^2 + b^2}$$

och

$$\Theta(n)\, r^n \sin n\varphi \sim \frac{(z/r)\sin\varphi}{(z/r)^2 - 2(z/r)\cos\varphi + 1} = \frac{zr\sin\varphi}{z^2 - 2zr\cos\varphi + r^2} = \frac{bz}{(z-a)^2 + b^2}$$

□

- **Exempel.** Ett LTI-system har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{3z}{(3z-1)(6z^2-5z+1)}$$

Bestäm impulssvaret och avgör systemets stabilitet.

Lösning. Vi har faktoriseringen $6z^2 - 5z + 1 = (3z-1)(2z-1)$, vilket ger

$$H(z) = \frac{3z}{(3z-1)(6z^2-5z+1)} = \frac{3z}{(3z-1)^2(2z-1)} = \frac{\frac{z}{6}}{(z-\frac{1}{3})^2(z-\frac{1}{2})}$$

Av partialbråksuppdelningen (några detaljer överhoppas)

$$\begin{aligned}\frac{H(z)}{z} &= \frac{\frac{1}{6}}{(z-\frac{1}{3})^2(z-\frac{1}{2})} = \frac{A}{z-\frac{1}{3}} + \frac{B}{(z-\frac{1}{3})^2} + \frac{C}{z-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-6}{z-\frac{1}{3}} - \frac{1}{(z-\frac{1}{3})^2} + \frac{6}{z-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

följer att

$$H(z) = \frac{-6z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{(z-\frac{1}{3})^2} + \frac{6z}{z-\frac{1}{2}}$$

Inverstransformering, med hjälp av (Z.9) och (Z.11), ger sedan

$$h(n) = \Theta(n)\,\frac{-6}{3^n} - \Theta(n)\,\frac{n}{3^{n-1}} + \Theta(n)\,\frac{6}{2^n} = \left(\frac{6}{2^n} - \frac{3n+6}{3^n}\right)\Theta(n).$$

Systemet är stabilt, eftersom båda polerna, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$, har absolutbelopp mindre än ett. □

- **Exempel.** Lös differensekvationen $a_{n+1} + a_n = n,\ n \geq 0$, där $a_0 = 1$.

Lösning. Om $a_n \sim A(z)$ så gäller att $a_{n+1} \sim z\,A(z) - z\,a_0 = z\,A(z) - z$. Enligt (Z.10) har vi $n \sim z(z-1)^{-2}$. Z-transformen av differensekvationen blir därför

$$(z+1)A(z) = z + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z^2-2z+2)}{(z-1)^2}$$

Partialbråksutvecklingen (vissa detaljer förbigås)

$$\begin{aligned}\frac{A(z)}{z} &= \frac{z^2-2z+2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} \\ &= \frac{5/4}{z+1} - \frac{1/4}{z-1} + \frac{1/2}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

ger, med (Z.9) och (Z.10),

$$A(z) = \frac{5}{4}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} \quad \sim \quad a_n = \frac{5}{4}(-1)^n - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \quad n \geq 0.$$

□

- **Exempel.** Bestäm den komplexa Fourierserien för den 2π-periodiska funktionen $f(t)$, som ges av att $f(t) = e^t$ för $-\pi < t < \pi$. Bestäm summan $S(t)$ av Fourierserien för alla t, för vilka serien konvergerar. Använd Fourierserien för att beräkna

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^2} \qquad \text{och} \qquad \sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Lösning. Vi har

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(-1)^n}{1-in} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(-1)^n(1+in)}{(1-in)(1+in)} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} + \frac{(-1)^n in}{1+n^2}\right)\end{aligned}$$

$-\infty < n < \infty$. Fourierserien för $f(t)$ är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Konvergenssatsen för Fourierserier ger här att $S(t)$ existerar för alla $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = f(t)$, då $t \neq (2k+1)\pi$, och $S((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right)$ (k heltal).

Genom att sätta $t = 0$ får vi (observera att imaginärdelen av c_n är en udda funktion av n):

$$\begin{aligned}1 = e^0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} - \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} - \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sigma_1,\end{aligned}$$

vilket ger

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{e^{\pi} - e^{-\pi} - 2\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

Genom att sätta $t = \pi$ får vi, på samma sätt, att

$$\begin{aligned} S(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n(-1)^n}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\sigma_2, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\frac{(\pi - 1)e^{\pi} + (\pi+1)e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

□

- **Exempel.**(2009-01-13:1) Bestäm fouriertransformen $F(\omega)$ till $f(t) = t\,e^{-|t|}$.

  Lösning. Av (F.10) ser vi att $g(t) = e^{-|t|}$ har transformen $G(\omega) = 2(1+\omega^2)^{-1}$. (F.6) medför att $f(t) = t\,g(t)$ har transformen

  $$F(\omega) = iG'(\omega) = -2i(1+\omega^2)^{-2}(2\omega) = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

  □

- **Exempel.**(2009-01-13:2) Bestäm funktionen $f(t)$, som har laplacetransformen

  $$F(s) = \frac{s^2+4}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

  Lösning. Vi partialbråksutvecklar $F(s)$ (några detaljer överhoppas):

  $$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2+4}{(s-1)((s+1)^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{A(s^2+2s+2) + B(s^2-1) + C(s-1)}{(s-1)((s+1)^2+1)} = \frac{(A+B)s^2 + (2A+C)s + (2A-B-C)}{(s-1)((s+1)^2+1)} \\ &= (A=1, B=0, C=-2) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

  Med hjälp av (L.2), (L.13) och (L.16) får vi

  $$f(t) = e^t - 2e^{-t}\sin t.$$

  □

- **Exempel.**(2009-01-13:3) Funktionen $f(t)$ har fouriertransformen $F(\omega)$. Man definierar en ny funktion g genom
$$g(t) = (\cos 3t) \cdot f(\tfrac{1}{2}t)$$
Uttryck g:s fouriertransform $G(\omega)$ med hjälp av f:s fouriertransform.

Lösning. Vi har
$$g(2t) = (\cos 6t)\, f(t) = \frac{e^{6it} + e^{-6it}}{2} f(t) = \tfrac{1}{2} f(t)e^{6it} + \tfrac{1}{2} f(t)e^{-6it}$$
Av (F.5) följer att $g(2t)$ har transformen $G(\omega/2)/2$. Av (F.2) följer att
$$\tfrac{1}{2} f(t)e^{6it} + \tfrac{1}{2} f(t)e^{-6it} \sim \tfrac{1}{2} F(\omega - 6) + \tfrac{1}{2} F(\omega + 6)$$
Alltså gäller
$$\frac{G(\omega/2)}{2} = \frac{F(\omega-6) + F(\omega+6)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad G\left(\frac{\omega}{2}\right) = F(\omega - 6) + F(\omega + 6)$$
Om vi i den sista likheten byter ω mot 2ω så får vi slutligen
$$G(\omega) = F(2\omega - 6) + F(2\omega + 6).$$
$\square$

- **Exempel.**(2009-01-13:4) Ett LTI-system i diskret tid ges av
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k)x(k), \quad n \geq 0,$$
där $h(n)$ är impulssvaret, $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är den resulterande utsignalen. Systemet fungerar så att insignalen $x = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ ger upphov till utsignalen $y = (2^{-n})_0^\infty$. Bestäm impulssvaret.

Lösning. Låt $H(z)$ vara överföringsfunktionen och låt $X(z)$, $Y(z)$ vara z-transformerna av $x(n)$ respektive $y(n)$. Transformdefinitionen och (Z.9) ger
$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z} \\ Y(z) &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$
Det generella sambandet $Y(z) = H(z)X(z)$ ger
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z+1)}$$
Det följer att
$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z+1)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z+1} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{z+1}, \end{aligned}$$

vilket ger

$$H(z) = \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\frac{z}{z+1}$$

Med hjälp av (Z.9) fås sedan impulssvaret

$$h(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

□