Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Sammanfattning av föreläsningarna 1 - 6, 29/10 - 8/11, 2012.

- **De trigonometriska basfunktionerna.** Denna kurs handlar i princip om att uttrycka en mer eller mindre godtycklig funktion som någon form av oändlig (ibland ändlig) linjärkombination av rena cosinus- eller sinusfunktioner $f(t) = \cos \omega t$, $g(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$. Man säger att ω är funktionens vinkelfrekvens. Vi har

$$f(t) = f(t+T),\ g(t) = g(t+T),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{där} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T sägs vara en **period** för funktionerna. Observera att varje heltalsmultipel av en period också är en period

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = f(t \pm 3T) = \dots$$

Med en funktions period (i bestämd form) menas normalt den minsta positiva perioden.

- **Exempel.** Summan av två periodiska funktioner behöver inte vara periodisk. Funktionen

$$h(t) = \cos \omega_1 t + \sin \omega_2 t$$

är periodisk om och endast om $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ är ett rationellt tal. Om

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

där m, n är heltal, och vi sätter

$$\omega = \frac{\omega_1}{m} = \frac{\omega_2}{n}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

så är $h(t) = \cos m\omega t + \sin n\omega t$ periodisk med perioden T. Exempelvis har

$$h(t) = \cos \tfrac{1}{2}t + \sin 3t$$

perioden 4π.

- **Integralen över en period.** För ett godtyckligt $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos \omega t \, dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin \omega t \, dt = 0, \quad \text{förutsatt att} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- **Eulers formler.** Låt $w = u + iv$, $z = x + iy$, där u, v, x, y är reella. Den komplexa exponentialfunktionen definieras genom

$$e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} \quad \text{där} \quad e^{iv} = \cos v + i \sin v \tag{$*$}$$

Den högra formeln visar det nära sambandet mellan (den komplexa) exponentialfunktionen och de trigonometriska funktionerna.

Exponentiallagen

$$e^w e^z = e^{w+z}, \quad \text{för alla} \quad w, z \in \mathbb{C}$$

är lätt att komma ihåg och ger oss möjlighet att enkelt härleda behövliga trigonometriska formler. Exponentiallagen och $(*)$ ger direkt (sätt $u = x = 0$)

$$\begin{aligned}\cos(v+y) + i\sin(v+y) &= e^{i(v+y)} = e^{iv}e^{iy} = (\cos v + i\sin v)(\cos y + i\sin y)\\ &= (\cos v\cos y - \sin v\sin y) + i(\cos v\sin y + \sin v\cos y)\end{aligned}$$

Genom identifikation av real- och imaginärdelar får vi

$$\cos(v+y) = \cos v\cos y - \sin v\sin y \quad \text{och} \quad \sin(v+y) = \sin v\cos y + \cos v\sin y$$

Av $(*)$ följer även att $e^{-iv} = \cos v - i\sin v$,

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \quad \text{och} \quad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} \quad v \in \mathbb{R}.$$

- **Exempel.** Härled formler för $\sin a \sin b$, $\sin a \cos b$ och $\cos a \cos b$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösning. Eulers formler ger

$$\begin{aligned}\sin a\sin b &= \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}\right)\\ &= (-\tfrac{1}{4})\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)\end{aligned}$$

På samma sätt fås

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a-b) + \tfrac{1}{2}\sin(a+b)$$

och

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

□

- **Ortogonalitetsintegraler.** Låt m, n vara icke-negativa heltal. Då integralen av en sinus- eller cosinusfunktion över en period är noll följer av ovanstående exempel att

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{\alpha+T} \cos m\Omega t\, \cos n\Omega t\, dt &= 0, \quad m \neq n\\ \int_\alpha^{\alpha+T} \sin m\Omega t\, \sin n\Omega t\, dt &= 0, \quad m \neq n\\ \int_\alpha^{\alpha+T} \sin m\Omega t\, \cos n\Omega t\, dt &= 0, \quad \text{för alla } m, n\end{aligned}$$

och

$$\int_\alpha^{\alpha+T} \cos^2 n\Omega t\, dt = \int_\alpha^{\alpha+T} \sin^2 n\Omega t\, dt = \tfrac{1}{2}T \quad \text{då } n > 0.$$

Här gäller förstås att $T = 2\pi/\Omega$.

- **Periodiska trigonometriska polynom.** Låt Ω vara ett positivt reellt tal. Ett trigonometriskt polynom med perioden $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ är en ändlig summa

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

Ortogonalitetsintegralerna ger direkt att

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \, \cos n\Omega t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \, \sin n\Omega t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Komplexvärda funktioner.** En komplexvärd funktion av den reella variabeln t är en funktion av formen

$$f(t) = u(t) + iv(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta,$$

där $u(t), v(t)$ är reellvärda funktioner. Derivatan och integralen av en sådan funktion definieras naturligt som

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t), \qquad \alpha < t < \beta,$$

respektive

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) \, dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) \, dt.$$

En antiderivata (eller primitiv funktion) till $f(t)$ är en funktion $F(t)$ sådan att $F'(t) = f(t)$, för $\alpha < t < \beta$.

Det visar sig att med få undantag gäller de välbekanta derivations- och integrationsreglerna. Exempelvis

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

- **Exempel.** Låt $c = a + ib \neq 0$. Enligt ovan har vi

$$f(t) = e^{ct} = e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

Deriveringsreglerna ger

$$\begin{aligned}
f'(t) &= a \, e^{at} (\cos bt + i \sin bt) + e^{at} (-b \sin bt + ib \cos bt) \\
&= e^{at} (a \cos bt + ia \sin bt) + e^{at} (-b \sin bt + ib \cos bt) \\
&= e^{at} ((a + ib) \cos bt + (ia - b) \sin bt) = e^{at} ((a + ib) \cos bt + i(a + ib) \sin bt) \\
&= (a + ib) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) = c \, e^{ct}
\end{aligned}$$

Av detta följer att en antiderivata till $f(t) = e^{ct}$ är

$$F(t) = \tfrac{1}{c} \, e^{ct}$$

- **Exempel.** Funktionen

$$f(t) = e^{i\omega t}$$

är periodisk, med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Speciellt gäller att

$$f(n\,\tfrac{2\pi}{\omega}) = e^{2\pi n i} = 1, \quad \text{för alla heltal} \quad n.$$

Vi har även

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{i\omega t} dt &= \left[\tfrac{1}{i\omega}\, e^{i\omega t}\right]_{\alpha}^{\alpha+T} \\ &= \tfrac{1}{i\omega}\,\left(e^{i\omega(\alpha+T)} - e^{i\omega\alpha}\right) = 0.\end{aligned}$$

- **Trigonometriska polynom på komplex form.** Av Eulers formler följer att

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t}\end{aligned}$$

där $c_0 = \frac{1}{2}\,a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, för $n = 1, \ldots, N$. $(c_n),\ -N \le n \le N$ är de komplexa fourierkoefficienterna för $f(t)$. Dessa ges även av integralerna

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, e^{-in\Omega t} dt, \quad -N \le n \le N,$$

där vi utnyttjar sambanden (ortogonalitetsintegralerna)

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{im\Omega t}\, e^{-in\Omega t} dt = \left\{\begin{array}{lll} 1, & \text{då} & m = n \\ 0, & \text{då} & m \ne n \end{array}\right\}$$

- **Fourierserier.** Antag nu att $f(t)$ är en mer eller mindre godtycklig (reellvärd) funktion, som är periodisk med perioden $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ $(f(t) = f(t+T),\ t \in \mathbb{R})$. Vi definierar funktionens Fourierserie, på trigonometrisk form, som

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

där talen a_n, b_n (funktionens (reella) Fourierkoefficienter) ges av

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,\cos n\Omega t\,dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,\sin n\Omega t\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Funktionens Fourierserie, på komplex (eller exponentiell) form, definieras som

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$$

där talen c_n (funktionens komplexa Fourierkoefficienter) ges av

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,e^{-in\Omega t}dt, \quad -\infty < n < \infty.$$

Mellan de reella och komplexa Fourierkoefficienterna råder sambanden

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\,a_0, \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n) = \overline{c_n}, \quad 0 < n < \infty.$$

Den N:te delsumman, $S_N(t) = S_N(f, t)$, av f:s Fourierserie definieras som det trigonometriska polynomet

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t}$$

- **Udda och jämna funktioner.**
  - Om $f(t)$ är udda, $f(-t) = -f(t)$, så är $a_n = 0$ för alla n och

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin n\Omega t\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

  - Om $f(t)$ är jämn, $f(-t) = f(t)$, så är $b_n = 0$ för alla n och

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos n\Omega t\,dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Konvergens.** Fourierserien sägs konvergera för ett visst värde på t, med summan $S(t)$, om $S_N(t) \to S(t)$ då $N \to \infty$. För en funktion i allmänhet är det inte säkert att Fourierserien konvergerar för varje (eller ens något) värde på t. Även om serien konvergerar är det inte säkert att $S(t) = f(t)$. Vi skriver av dessa anledningar

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \quad \text{eller} \quad f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$$

när vi anger Fourierserien för funktionen $f(t)$. Om vi i stället skriver

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \quad \text{eller} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$$

betyder det att (i) serien konvergerar för detta t och (ii) summan är lika med $f(t)$.

För de funktioner som dyker upp i tillämpningarna brukar det inte vara några problem med konvergensen och vi har $S(t) = f(t)$ för nästan alla t. Se nedanstående konvergenskriterium.

- **Exempel.** (se även ex. 3.9 i boken) Funktionen $f(t)$ är periodisk, med perioden 2π, och $f(t) = -t$, för $-\pi < t < \pi$. Bestäm f:s Fourierserie på trigonometrisk och komplex form. Skissa grafen av funktionen och någon lämplig delsumma.

Lösning. Vi ser att $f(t)$ är udda för $-\pi < t < \pi$, vilket medför att funktionen är udda för $-\infty < t < \infty$ (om vi bortser från punkterna $t = n\pi$, n heltal, där funktionen inte är definierad). Alltså gäller $a_n = 0$, för alla n, och

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-t)\, \sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[(-t)\,\frac{-\cos nt}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\,\frac{-\cos nt}{n}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[(-\pi)\,\frac{-\cos n\pi}{n}\right] - \frac{2}{\pi}\left[(-1)\,\frac{-\sin nt}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} \\
&= \frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\, \sin nt$$

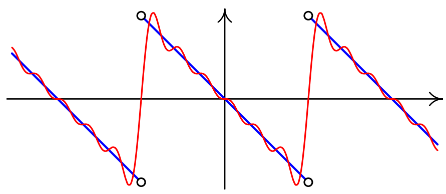
För de komplexa Fourierkoefficienterna har vi $c_0 = 0$,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{i(-1)^{n-1}}{n}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{i(-1)^{n-1}}{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

och

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} = \sum_{n\neq 0} \frac{i(-1)^{n-1}}{n}\, e^{int}$$

Funktionsgrafen (blå) och grafen för $S_6(t)$ (röd):



Vi ser att delsummans graf ligger nära funktionsgrafen, förutom vid språngpunkterna

$$t = (2k+1)\pi, \qquad k \text{ heltal}$$

där delsumman är noll. $\square$

- **Konvergenskriterium.** För att säkert kunna integrera funktionerna antar vi att alla funktioner vi sysslar med är begränsade och styckvis kontinuerliga (på varje intervall av periodlängd, $\alpha \leq t \leq \alpha + T$, har funktionen högst ett ändligt antal språngdiskontinuiteter).

  För att säkerställa att Fourierserien konvergerar i en viss punkt t måste vi dock kräva mer. Vi har följande: Om de båda gränsvärdena

$$f(t^+) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t+\varepsilon) \quad \text{och} \quad f(t^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t-\varepsilon)$$

  existerar och dessutom de generaliserade höger- och vänsterderivatorna

$$f'_+(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t^+)}{\varepsilon} \quad \text{respektive} \quad f'_-(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t^-)}{\varepsilon}$$

  existerar så gäller att $S_N(t) \to S(t)$, där

$$S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

  Speciellt gäller att $S(t) = f(t)$ om f är kontinuerlig i t och dessutom de generaliserade höger- och vänsterderivatorna existerar.

- **Exempel (fortsättning).** I ovanstående exempel gäller att för varje $t \in \mathbb{R}$ existerar $f(t^+)$ och $f(t^-)$. För de generaliserade höger- och vänsterderivatorna gäller överallt att $f'_+(t) = f'_-(t) = -1$. Konvergenskriteriet medför att $S(t)$ existerar för alla t och $S(t) = f(t)$ förutom då t är en udda heltalsmultipel av π, i vilket fall $S(t) = 0$. För $t = -\frac{\pi}{2}$ får vi, till exempel,

$$\frac{\pi}{2} = f(-\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin \tfrac{n\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

  Alltså gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

- **Signaleffekt.** I många tillämpningar är en periodisk (eller icke-periodisk, men just nu handlar det om periodiska funktioner) funktion $f(t)$ modell för en i tiden varierande fysikalisk kvantitet (spänning, strömstyrka, lufttryck etc.). Man kallar i sådana sammanhang funktionen för en signal. Energin som signalen innehåller under tidsintervallet $\alpha < t < \alpha + T$ definieras som

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 \, dt$$

  Energin hos en periodisk signal är därför (normalt) oändlig. Däremot har signalen ändlig effekt, vilken definieras som

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 \, dt$$

  där $\alpha \in \mathbb{R}$ är godtyckligt och T är en (godtycklig) period. Definitionen omfattar alla komplexvärda periodiska signaler $f(t) = u(t) + iv(t)$. Vi påminner om att

$$|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)} = (u(t) + iv(t))(u(t) - iv(t)) = u(t)^2 + v(t)^2$$

- **Parsevals formel.** Effekten i signalen som ges av $g(t) = c_n e^{in\Omega t}$, $t \in \mathbb{R}$, där n är ett heltal och Ω är ett positivt reellt tal (vinkelfrekvensen), är

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |g(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} c_n e^{in\Omega t}\overline{c_n} e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |c_n|^2\,dt = |c_n|^2$$

där $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Om signalen ges av ett godtyckligt trigonometriskt polynom

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

så är effekten

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Om funktionen är reell så ges effekten även av

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2$$

Sambandet säger att signaleffekten är lika med summan av effekterna, $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2$, som bärs av de rena svängningarna $c_n e^{in\Omega t} + c_{-n} e^{-in\Omega t}$, som signalen är uppbyggd av.

Eftersom man kan approximera de funktioner vi håller på med godtyckligt nära, i effektmening, med trigonometriska polynom får vi (låt $N \to \infty$) effektformlerna

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

och, för reella funktioner,

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Genom multiplikation med två blir den sista formeln

$$\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Formlerna ovan brukar kallas för Parsevals formel.

- **Exempel (fortsättning).** I exemplet ovan där $f(t) = -t$, $-\pi < t < \pi$, och

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nt, \quad \text{då} \quad t \neq (2k+1)\pi$$

ger Parsevals formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

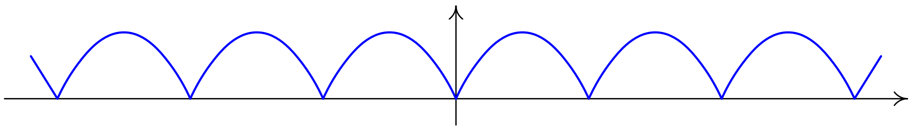
Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- **Exempel.** Funktionen $f(t)$ är jämn och periodisk, med perioden 2, och för $0 < t < 1$ gäller att $f(t) = t(1-t)$. Bestäm f:s Fourierserie. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Lösning. Vi har här $\Omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Grafen för $f(t)$ (för tydlighetens skull har vi tagit grafen för $2f(t)$) framgår av:



Funktionen är kontinuerlig överallt och även deriverbar överallt, förutom i heltalspunkterna $t = n \in \mathbb{Z}$, där $f'_+(n) = 1$ och $f'_-(n) = -1$ (grafen har hörn i dessa punkter). Enligt konvergenskriteriet konvergerar därför Fourierserien överallt och dess summa är lika med funktionen. Eftersom grafen har hörn räknar vi med att Fourierkoefficienterna har storleksordningen n^{-2}.

Då funktionen är jämn gäller att $b_n = 0$, för alla n, och

$$a_n = (2)\int_0^1 (t - t^2)\,\cos n\pi t\,dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

För $n = 0$ får vi

$$a_0 = (2)\int_0^1 (t - t^2)\,dt = (2)\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

För $n > 0$ får vi

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (2t - 2t^2)\,\cos n\pi t\,dt \\ &= \left[(2t - 2t^2)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (2 - 4t)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\,dt \\ &= 0 - \left[(2 - 4t)\frac{-\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 (-4)\frac{-\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\,dt \\ &= \frac{(-2)\cos n\pi - 2\cos 0}{n^2\pi^2} + 0 = \frac{(-2)(1 + \cos n\pi)}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Alltså gäller

$$a_{2k-1} = 0 \quad \text{och} \quad a_{2k} = -\tfrac{1}{k^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Precis som vi gissade har Fourierkoefficienterna a_n storleksordningen n^{-2}.

Eftersom funktionen är kontinuerlig och uppfyller konvergenskriteriet överallt kan vi skriva

$$f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k t}{k^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

där högerledet är Fourierserien för $f(t)$. Sätter vi in $t = 0$ i $(*)$ får vi

$$0 = f(0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Sätter vi in $t = \frac{1}{2}$ i $(*)$ får vi

$$\tfrac{1}{4} = f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos \pi k}{k^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Parsevals formel ger

$$\begin{aligned}\frac{1}{18} + \frac{1}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} &= (2)\int_0^1 f(t)^2\,dt = (2)\int_0^1 (t-t^2)^2\,dt \\ &= (2)\int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4)\,dt = (2)(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{1}{15}\end{aligned}$$

Av detta följer slutligen att

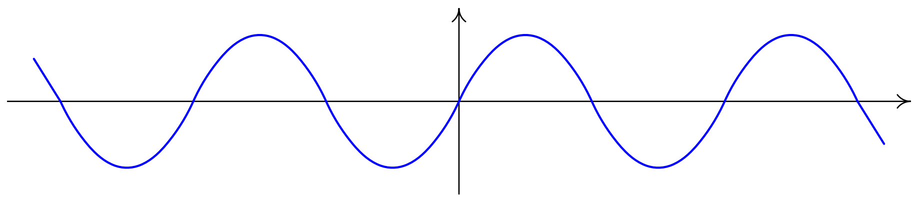
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

□

- **Exempel.** Funktionen $g(t)$ är udda och periodisk, med perioden 2, och för $0 < t < 1$ gäller att $g(t) = t(1-t)$. Bestäm g:s Fourierserie på trigonometrisk och exponentiell form. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}$$

Lösning. Grafen för $g(t)$ (för tydlighetens skull har vi tagit grafen för $2g(t)$) framgår av:



Funktionen är kontinuerlig överallt och även deriverbar överallt, även i heltalspunkterna (där dock derivatans graf har hörn). Enligt konvergenskriteriet konvergerar därför Fourierserien överallt och dess summa är lika med funktionen. Vi räknar med att Fourierkoefficienterna har storleksordningen n^{-3}.

Då funktionen är udda gäller att $a_n = 0$, för alla n, och

$$b_n = (2)\int_0^1 (t - t^2)\,\sin n\pi t\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^1 (2t-2t^2)\ \sin n\pi t\, dt \\
&= \left[(2t-2t^2)\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (2-4t)\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\, dt \\
&= 0 - \left[(2-4t)\frac{-\sin n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 (-4)\frac{-\sin n\pi t}{n^2\pi^2}\, dt \\
&= 0 + \left[(-4)\frac{\cos n\pi t}{n^3\pi^3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{4(1-\cos n\pi)}{n^3\pi^3}
\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$b_{2k+2} = 0 \quad \text{och} \quad b_{2k+1} = \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Precis som vi gissade har Fourierkoefficienterna b_n storleksordningen n^{-3}.

Eftersom funktionen är kontinuerlig och uppfyller konvergenskriteriet överallt kan vi skriva

$$g(t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{$*$}$$

där högerledet är Fourierserien för $g(t)$. Sätter vi in $t = \frac{1}{2}$ i $(*)$ får vi

$$\tfrac{1}{4} = g(\tfrac{1}{2}) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{(2k+1)^3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Parsevals formel ger

$$\tfrac{1}{15} = (2)\int_0^1 g(t)^2\, dt = \frac{64}{\pi^6}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$$

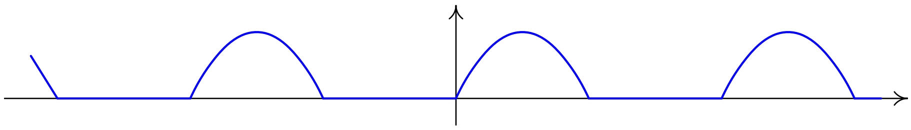
Av detta följer slutligen att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$\square$

- **Exempel.** Funktionen $f(t)$ är periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $f(t) = 2t(1-t)$, medan $f(t) = 0$, för $-1 < t < 0$. Bestäm f:s Fourierserie. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall.

  Lösning. Vi har $\Omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Grafen för $f(t)$ framgår av:

  Funktionen är kontinuerlig överallt och även deriverbar överallt, förutom i heltalspunkterna, där grafen har hörn. Enligt konvergenskriteriet konvergerar Fourierserien överallt och dess summa är lika med funktionen. Eftersom grafen har hörn räknar vi med att Fourierkoefficienterna har storleksordningen n^{-2}.

  I stället för att direkt beräkna Fourierkoefficienterna skriver vi funktionen som en summa av en jämn- och en udda funktion enligt

  $$f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2} = f_j(t) + f_u(t)$$

  För $0 < t < 1$ gäller att $f_j(t) = f_u(t) = t(1-t)$. Vi känner därför Fourierserierna för dessa båda funktioner från våra tidigare exempel:

  $$f_j(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kt}{k^2}, \quad f_u(t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3}$$

  Den sökta Fourierserien ges därför av

  $$f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kt}{k^2} + \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3}$$

  (med konvergens överallt). □

- **Exempel.** I ett tidigare exempel visade vi att

  $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

  Använd detta resultat för att beräkna summan $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

  Lösning. Vi har

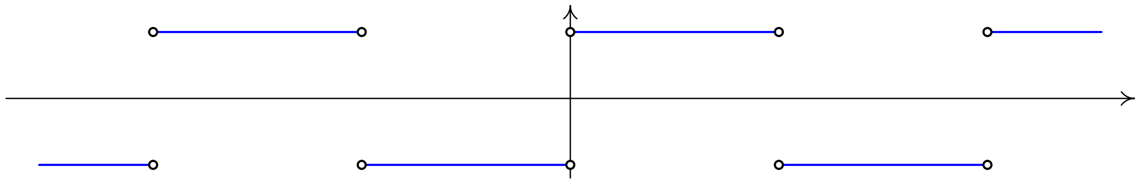
  $$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{\sigma}{64}$$

  Detta ger oss

  $$\frac{63\sigma}{64} = \frac{\pi^6}{960} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$$

  □

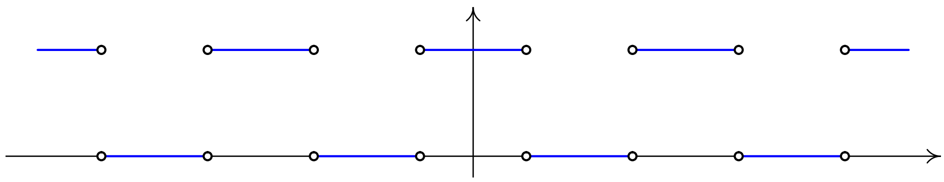
- **Exempel.** En udda 2π-periodisk kantvåg $f(t)$, sådan att $f(t) = 1$ för $0 < t < \pi$,



har enligt läroboken, sidan 65, Fourierutvecklingen

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

Bestäm, med hjälp av denna, Fourierserien för kantvågen $g(t)$, med perioden 2, som uppfyller $g(t) = 1$, för $0 < |t| < \frac{1}{2}$, och $g(t) = 0$, för $\frac{1}{2} < |t| < 1$.



Lösning. Funktionen $f(\pi t)$ är en udda kantvåg med perioden 2, som antar värdet -1, för $-1 < t < 0$, och värdet 1, för $0 < t < 1$. Det betyder att $1 + f(\pi t)$ antar värdet 0, för $-1 < t < 0$, och värdet 2, för $0 < t < 1$. Alltså har vi likheten $2g(t - \frac{1}{2}) = 1 + f(\pi t)$. Med hjälp av sambandet

$$\sin\left(A + (2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right) = (\sin A)\left(\cos(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right) + (\cos A)\left(\sin(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos A$$

får vi därför

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\pi(t + \tfrac{1}{2})) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi(t+\frac{1}{2})}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\pi t + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k+1)\pi t}{2k+1} \end{aligned}$$

$\square$

Vi går nu över från Fourierserierna till Fouriertransformen.

- **Härledning av Fouriertransformen, med utgångspunkt från Fourierserierna.** De periodiska funktionerna har ändlig effekt men, i regel, oändlig energi. Sådana funktioner kan skrivas som en summa av rena harmoniska svängningar

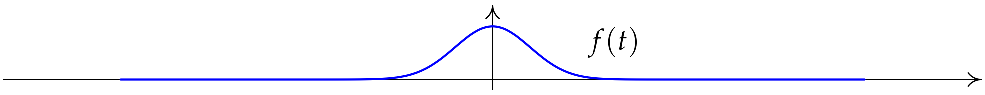
$$c_n e^{in\Omega t} + c_{-n} e^{-in\Omega t} \quad \text{med effekten} \quad |c_n|^2 + |c_{-n}|^2$$

och funktionens effekt är summan av dessa effekter.

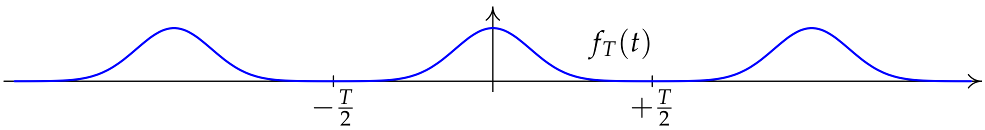
Nu vill vi göra något liknande för aperiodiska, i allmänhet komplexvärda, funktioner $f(t)$, $-\infty < t < \infty$. Dessa har ändlig energi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

och därför effekten noll. Funktionen närmar sig noll när $t \to \pm\infty$. Exempelvis kan det se ut som



Vi tar nu ett (stort) positivt reellt tal T och inför den T-periodiska funktionen $f_T(t)$, som uppfyller $f_T(t) = f(t)$, för $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$:



För funktionen f_T gäller att

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\Omega t} dt$$

Vi inför nu funktionerna

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad -\infty < \omega < \infty$$

(detta är Fouriertransformen av $f(t)$) och

$$F_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad -\infty < \omega < \infty$$

Då gäller $T\, c_n = F_T(n\Omega)$. Eftersom $f(t) = f_T(t)$, för $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, har vi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_T(n\Omega)}{T} e^{in\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(n\Omega)\, e^{in\Omega t} \Omega, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

Då $T \to \infty$ gäller att $F_T(\omega) \to F(\omega)$ och $\Omega \to 0^+$. Vi gissar därför att

$$f(t) = \lim_{\Omega \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Omega)\, e^{in\Omega t} \Omega$$

För en hygglig funktion $\Phi(\omega)$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega = \lim_{\Omega \to 0^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n\Omega)\, \Omega$$

(högerledet är en Riemannsumma). Alltså bör det gälla att

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega, \quad -\infty < t < \infty$$

Detta samband kallas för inversionsformeln (för Fouriertransformen). För att få något som är användbart vid beräkningar måste förstås ovanstående preciseras:

- **Sats.** Antag att $f(t)$ är begränsad, styckvis kontinuerlig och att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad (f(t) \text{ är absolutintegrabel})$$

Då är Fouriertransformen

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

definierad och kontinuerlig för $-\infty < \omega < \infty$. Dessutom gäller att $F(\omega) \to 0$ då $|\omega| \to \infty$. Om de båda gränsvärdena

$$f(t^+) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t+\varepsilon) \quad \text{och} \quad f(t^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t-\varepsilon)$$

existerar och dessutom de generaliserade höger- och vänsterderivatorna

$$f'_+(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t^+)}{\varepsilon} \quad \text{respektive} \quad f'_-(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t^-)}{\varepsilon}$$

existerar så gäller

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

- **Plancherels formler.** För begränsade, styckvis kontinuerliga och absolutintegrabla funktioner $f(t)$, $g(t)$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\, d\omega$$

Speciellt, för $g(t) = f(t)$, har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \qquad (*)$$

- **Energitätheten.** Båda leden i $(*)$ uttrycker energin i signalen $f(t)$, $-\infty < t < \infty$. Energin som bärs av signalen under tidsintervallet $t_1 < t < t_2$ är

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\, dt$$

medan energin i signalen, som bärs av frekvenserna ω, för vilka $0 \le \alpha < \omega < \beta$, är

$$\int_\alpha^\beta \Phi(\omega)\, d\omega$$

där

$$\Phi(\omega) = \frac{|F(\omega)|^2 + |F(-\omega)|^2}{2\pi}, \qquad 0 < \omega < \infty,$$

är funktionens energitäthet.

- **Transformering av jämna- respektive udda funktioner.**
  - Om f är jämn, $f(-t) = f(t)$, gäller

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \\ &= (2)\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt = F(-\omega) \end{aligned}$$

  - Om f är udda, $f(-t) = -f(t)$, gäller

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \\ &= (-2i)\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt = -F(-\omega) \end{aligned}$$

  Transformen av en jämn (udda) funktion är alltså jämn (udda).

- **Inverstransformering av jämna- respektive udda funktioner.** På samma sätt gäller att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\ \cos\omega t\, d\omega \quad \text{om } F(\omega) \text{ är jämn} \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega &= \frac{i}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\ \sin\omega t\, d\omega \quad \text{om } F(\omega) \text{ är udda} \end{aligned}$$

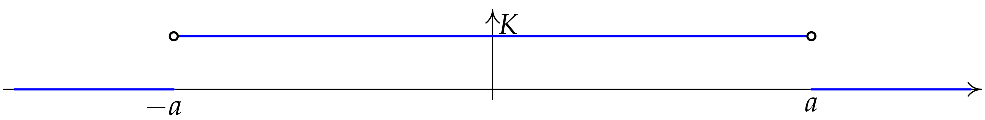
- **Exempel.** Beräkna Fouriertransformen av pulsen $f(t)$, som ges av att

$$f(t) = K, \quad \text{då} \quad -a < t < a, \quad \text{medan} \quad f(t) = 0 \quad \text{för övrigt.}$$

  Använd transformen för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin a\omega}{\omega}\, d\omega \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega$$

  Lösning. Detta är en jämn funktion:



Vi får

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= (2)\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt = (2K)\int_0^a \cos\omega t\,dt \\
&= (2K)\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_{t=0}^{t=a} \\
&= (2K)\frac{\sin a\omega}{\omega} = F(-\omega)
\end{aligned}
$$

se läroboken sidan 84. Om vi sätter $K = 1$ så ger inversionsformeln

$$
\begin{aligned}
1 = f(0) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}(2)\frac{\sin a\omega}{\omega}\,d\omega \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{4}{2\pi}\int_0^N \frac{\sin a\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{2}{\pi}\,I_1
\end{aligned}
$$

Alltså har vi $I_1 = \frac{\pi}{2}$. Värdet beror alltså inte på a. Vi sätter nu $a = K = 1$. Funktionens energi ges då av

$$
E = \int_{-1}^{1}|1|^2 dt = 2
$$

Enligt Plancherel gäller även att

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(4)\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega \\
&= \frac{8}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega = \frac{4}{\pi}\,I_2
\end{aligned}
$$

Alltså har vi $I_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. □

- **Exempel.** Bestäm Fouriertransformen av $f(t) = \Theta(t)e^{-ct}$, där $c = a + ib$, $a > 0$, och $\Theta(t)$ är den så kallade Heavisidefunktionen, som uppfyller $\Theta(t) = 0$ då $t < 0$ och $\Theta(t) = 1$ då $t > 0$ (se läroboken sidan 17).

Lösning. Vi får

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-ct}e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(c+i\omega)t}\,dt \\
&= \left[\frac{e^{-(c+i\omega)t}}{-(c+i\omega)}\right]_{t=0}^{t\to\infty} \\
&= \frac{1}{c+i\omega} = \frac{1}{a+i(b+\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty
\end{aligned}
$$

På samma sätt får vi att

$$
\Theta(-t)e^{ct} \sim \frac{1}{c-i\omega} = \frac{1}{a+i(b-\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty
$$

Denna gång är signalenergin (gå igenom detta noga!)

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty \left|e^{-ct}\right|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2at}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-2at}}{2a}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{1}{2a}
\end{aligned}
$$

Enligt Plancherel gäller även att

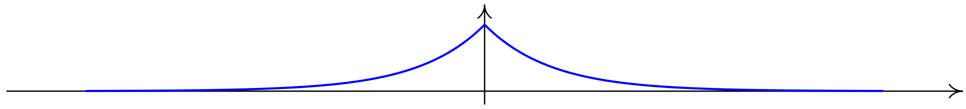
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|a+i(b+\omega)|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{a^2+(b+\omega)^2}$$

Det betyder att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{a^2+(b+\omega)^2} = \frac{\pi}{a}$$

Denna integral kan även beräknas med våra metoder från envariabelkursen. $\square$

- **Exempel.** Fouriertransformera $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.



Använd transformen för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\, d\omega}{1+\omega^2} \qquad \text{och} \qquad I_2 = \int_0^{\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

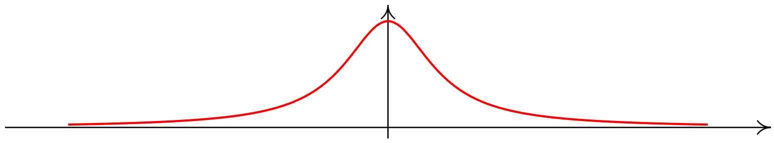
Lösning. Vi kan skriva

$$f(t) = e^{-|t|} = \Theta(t)e^{-t} + \Theta(-t)e^{t}$$

Från föregående exempel följer att

$$F(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

där vi utnyttjar Fouriertransformens linearitet (se nedan).



Enligt inversionsformeln gäller, för varje $t \in \mathbb{R}$, att

$$\begin{aligned} e^{-|t|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{i\omega t}\, d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(\cos\omega t + i\sin\omega t)}{1+\omega^2}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cos\omega t}{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t}{1+\omega^2}\, d\omega \end{aligned}$$

Sätter vi in $t = 1$ så får vi

$$e^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{2}{\pi} I_1$$

Alltså har vi $I_1 = \frac{\pi}{2e}$. Energin är denna gång

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}dt = (2)\int_0^{\infty} e^{-2t}dt = 1.$$

Enligt Plancherel gäller även att

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\, d\omega}{(1+\omega^2)^2} = \frac{8}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2} = \frac{4}{\pi} I_2$$

Alltså har vi $I_2 = \frac{\pi}{4}$. $\square$