Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Sammanfattning av föreläsningarna 7 - 10, 9/11 - 16/11 2012.

- **Allmänna regler för Fouriertransformen.**

$f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$	(A.0)
$Af(t) + Bg(t)$	$A\,F(\omega) + B\,G(\omega)$	(A.1) Linearitetsregeln
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$	(A.2) Fördröjningsregeln
$f(-t)$	$F(-\omega)$	(A.3)
$\overline{f(-t)}$	$\overline{F(\omega)}$	(A.4)
$e^{iat}f(t)$	$F(\omega - a)$	(A.5) Dämpningsregeln
$f'(t)$	$i\omega\, F(\omega)$	(A.6)
$t\, f(t)$	$i\, F'(\omega)$	(A.7)
$-it\, f(t)$	$F'(\omega)$	(A.8)
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$	(A.9) Tidsskalning
$\dfrac{1}{\lvert a\rvert} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$F(a\omega)$	(A.10) Frekvensskalning
$f(t) * g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx$	$F(\omega)G(\omega)$	(A.11) Faltningsregeln
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	(A.12) Symmetriregeln

- **Exempel.** Vi har i ett tidigare exempel visat att $e^{-|t|} \sim \dfrac{2}{1+\omega^2}$. Med hjälp av symmetriregeln får vi genast att

$$\frac{2}{1+t^2} \sim 2\pi\, e^{-|-\omega|} \quad \text{alltså} \quad \frac{1}{1+t^2} \sim \pi\, e^{-|\omega|}$$

- **Exempel.** Fouriertransformera $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

  Lösning. Vi har

  $$f'(t) = (-t)\,e^{-\frac{1}{2}t^2} = (-t)\,f(t) \quad \text{alltså} \quad f'(t) + t\,f(t) = 0 \tag{$*$}$$

  Fouriertransformerar vi ($*$), med hjälp av (A.6) och (A.7), får vi

  $$i\omega\,F(\omega) + i\,F'(\omega) = 0 \quad \text{alltså} \quad F'(\omega) + \omega\,F(\omega) = 0 \tag{\#}$$

  Differentialekvationen (#) har lösningen $F(\omega) = C\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$, där C är en konstant som ska bestämmas. Symmetriregeln (A.12) ger nu att

  $$C\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \sim 2\pi\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

  Å andra sidan ger linearitetsregeln (A.1) att

  $$C\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \sim C\,F(\omega) = C^2\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

  Det måste därför gälla att $C^2 = 2\pi$, av vilket följer att $C = \sqrt{2\pi}$. Slutsatsen blir att $F(\omega) = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$. Som en biprodukt har vi även visat att

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

  □

- **Exempel.** Bestäm $F(\omega)$ om

  $$\text{(a)}\quad f(t) = t\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad \text{(b)}\quad f(t) = e^{-|t|}\sin t \qquad \text{(c)}\quad f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2}$$

  Lösning. Vi utnyttjar transformreglerna och får:

  (a) Vi har tidigare visat att $e^{-\frac{1}{2}t^2} \sim \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$. (A.7) ger

  $$t\,e^{-\frac{1}{2}t^2} \sim i\sqrt{2\pi}\,\frac{d}{d\omega}\left(e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\right) = -i\sqrt{2\pi}\,\omega\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2} = F(\omega)$$

  (b) Vi har tidigare visat att $e^{-|t|} \sim \dfrac{2}{1+\omega^2}$. Eftersom, enligt Euler,

  $$e^{-|t|}\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{-|t|}e^{it} - e^{-|t|}e^{-it}\right)$$

  får vi, med (A.5),

  $$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2}{1+(\omega-1)^2} - \frac{2}{1+(\omega+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{i}\,\frac{4\omega}{(2+\omega^2-2\omega)(2+\omega^2+2\omega)} = \frac{-4\omega i}{(2+\omega^2)^2-4\omega^2} = \frac{-4\omega i}{\omega^4+4} \end{aligned}$$

(c) Vi har tidigare visat att $\dfrac{1}{1+t^2} \sim \pi\, e^{-|\omega|}$. Med hjälp av fördröjningsregeln (A.2) får vi

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2+1} \sim \pi\, e^{-|\omega|} e^{i\omega} = \pi\, e^{i\omega-|\omega|} = F(\omega)$$

□

- **Faltning.** Antag nu att $f(t)$, $g(t)$ är två styckvis kontinuerliga, begränsade och absolutintegrabla funktioner. Vi ställer oss frågan om det finns en funktion $h(t)$, sådan att $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$. Svaret är ja och funktionen $h(t)$, som är unik och absolutintegrabel, kallas för faltningen av $f(t)$ och $g(t)$. Faltningen av $f(t)$ och $g(t)$ betecknas som $f(t) * g(t)$ (vilket absolut inte får förväxlas med produkten av $f(t)$ och $g(t)$). Det visar sig att faltningen, som vi har definierat som inversa Fouriertransformen av $F(\omega)\, G(\omega)$, även kan skrivas

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \qquad (*)$$

Faltningen av två jämna- eller två udda funktioner blir en jämn funktion, medan faltningen av en jämn- och en udda funktion blir en udda funktion.

- **Exempel.** Låt $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Beräkna $h(t) = f(t) * f(t)$ och $\displaystyle\int_0^\infty f(t) \cos t\, dt$.

Lösning. Vi har visat att $f(t) \sim \pi\, e^{-|\omega|} = F(\omega)$, vilket medför att $f(t) * f(t) \sim \pi^2\, e^{-|2\omega|} = \pi\, F(2\omega)$. Men enligt (A.10) gäller att $F(2\omega) \sim \frac{1}{2} f(\frac{t}{2})$. Alltså har vi

$$f(t) * f(t) = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2}{4}} = \frac{2\pi}{4+t^2}$$

Då $f(t)$ är jämn gäller att $F(\omega) = (2) \displaystyle\int_0^\infty f(t) \cos \omega t\, dt$. Sätter vi $\omega = 1$ så får vi

$$\int_0^\infty f(t) \cos t\, dt = \frac{1}{2} F(1) = \frac{\pi}{2e}$$

□

- **Exempel.** Låt $f(t) = e^{-|t|}$. Bestäm $h(t) = f(t) * f(t)$.

Lösning. Då funktionen $f(t)$ är jämn följer att även $h(t)$ är jämn. Låt nu $t \geq 0$. Av faltningsformeln $(*)$ får vi

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-x|}\, e^{-|x|}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-(t-x)}\, e^{x}\, dx + \int_0^t e^{-(t-x)}\, e^{-x}\, dx + \int_t^\infty e^{t-x}\, e^{-x}\, dx \\ &= e^{-t} \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx + e^{-t} \int_0^t dx + e^{t} \int_t^\infty e^{-2x}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\, e^{-t} + t\, e^{-t} + \tfrac{1}{2}\, e^{-t} = (1+t)\, e^{-t} \end{aligned}$$

Eftersom $h(t)$ är jämn får vi slutligen

$$e^{-|t|} * e^{-|t|} = (1 + |t|)\, e^{-|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

- **Exempel.** Bestäm $h(t) = f(t) * f(t)$, där $f(t) = e^{-|t|}$, genom att använda transformreglerna.

  Lösning. Vi har tidigare visat att

  $$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \text{vilket, med (A.11), ger} \quad H(\omega) = F(\omega)^2 = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

  Av (A.8) följer att

  $$-it\, e^{-|t|} \sim \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) = \frac{-4\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

  Å andra sidan gäller, enligt (A.6), att

  $$\frac{-4\omega}{(1+\omega^2)^2} = -\omega\, H(\omega) = i(i\omega)\, H(\omega) \sim i\, h'(t)$$

  Alltså gäller

  $$-it\, e^{-|t|} = i\, h'(t) \quad \Longleftrightarrow \quad h'(t) = -t\, e^{-|t|}$$

  Med hjälp av partiell integration får vi $h(t) = K + (1 + |t|)\, e^{-|t|}$, där K är en integrationskonstant. Eftersom $h(t)$ är absolutintegrabel måste $K = 0$. $\square$

- **Exempel.** Lös faltningsekvationen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{-\frac{t^2}{4}}$.

  Lösning. Ekvationen kan skrivas $f(t) * e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{4}}$. Eftersom $e^{-\frac{t^2}{2}} \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}$, vilket via (A.9) ger $e^{-\frac{t^2}{4}} \sim \sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2}$, blir ekvationens Fouriertransform

  $$F(\omega)\, \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \sqrt{4\pi}\, e^{-\omega^2} \quad \Longrightarrow \quad F(\omega) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

  Alltså har vi $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ $\square$

- **Linjära tidsinvarianta system (LTI-system).** Ett sådant är en svart låda som tar emot en insignal $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, vilken förvandlas till en utsignal $y(t)$, $-\infty < t < \infty$. Dessutom måste följande gälla:

  - Om $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ så $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. (Linearitet).
  - Om $x(t)$ förvandlas till $y(t)$, så förvandlas $x(t-\tau)$ till $y(t-\tau)$. Alltså: Om insignalen fördröjs så resulterar det i att utsignalen fördröjs lika mycket (och inga andra förändringar uppstår). (Tidsinvarians).
  - En liten förändring av insignalen resulterar i en liten förändring av utsignalen. (Kontinuitet).

Varje LTI-system karakteriseras av en funktion $h(t)$, kallad impulssvaret, på så sätt att för varje insignal $x(t)$ ges utsignalen av $y(t) = h(t) * x(t)$.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

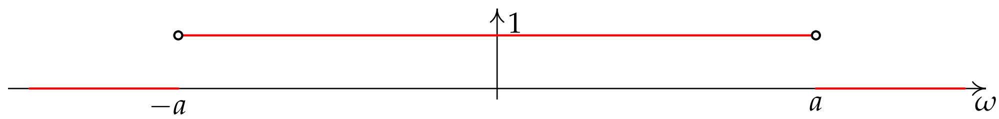
Impulsfunktionen $\delta(t)$ kan du läsa om i läroboken, avsnitt 1.5. Den har den fundamentala egenskapen att $h(t) * \delta(t) = h(t)$, för varje kontinuerlig funktion $h(t)$. Alltså gäller att om insignalen till ovanstående LTI-system är $\delta(t)$ så blir utsignalen $h(t)$. Fouriertransformen $H(\omega)$, av $h(t)$, kallas för systemets överföringsfunktion. Mellan denna och in/utsignalernas Fouriertransformer råder sambandet

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad \text{vilket även kan skrivas} \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

- **Ideala lågpassfilter.** Ett LTI-system vars överföringsfunktion ges av

$$H(\omega) = 1 \quad \text{för} \quad -a < \omega < a \quad \text{och} \quad H(\omega) = 0 \quad \text{för övrigt,}$$

kallas för ett idealt lågpassfilter med brytvinkelfrekvensen a:



Systemets impulssvar är $h(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$. Insignalen $x(t)$ förvandlas i detta fall till utsignalen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-u)\sin au}{\pi u}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} X(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$$

- **Exempel.** Ett LTI-system ges av att $-y''(t) + y(t) = x(t)$ (#), där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar. Bestäm även $y(t)$ i fallet då $x(t) = e^{-|t|}$.

Lösning. Fouriertransformation av (#) ger

$$-(i\omega)^2Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \quad \Longrightarrow \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{\omega^2+1}$$

vilket innebär att impulssvaret är $h(t) = \frac{1}{2}\,e^{-|t|}$. I fallet då $x(t) = e^{-|t|}$ får vi

$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}\,\frac{2}{\omega^2+1} = \frac{2}{(\omega^2+1)^2}$$

Ett exempel ovan ger då att $y(t) = \frac{1}{2}\,(1+|t|)\,e^{-|t|}$. $\square$

- **Exempel.** Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega(1+a^2\omega^2)} \quad \text{där} \quad a > 0.$$

Beräkna $f(0)$ och

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega(1+a^2\omega^2)}\, d\omega$$

Lösning. Enligt (F.10) gäller att

$$\tfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t) \qquad \sim \qquad \frac{\sin\omega}{\omega}$$

(F.11) kombinerat med (F.5) ger sedan att

$$\frac{1}{2a}e^{-\left|\frac{t}{a}\right|} \qquad \sim \qquad \frac{1}{1+a^2\omega^2}$$

Alltså gäller att

$$f(t) = \left(\tfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t)\right) * \left(\frac{1}{2a}e^{-\left|\frac{t}{a}\right|}\right) = \frac{1}{4a}\int_{u=-1}^{u=1} e^{-\frac{1}{a}|t-u|}du$$

Speciellt har vi

$$f(0) = \frac{1}{4a}\int_{u=-1}^{u=1} e^{-\frac{1}{a}|u|}du = \frac{1}{2a}\int_{u=0}^{u=1} e^{-\frac{u}{a}}du = \frac{1}{2a}\left[-a\,e^{-\frac{u}{a}}\right]_{u=0}^{u=1} = \tfrac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{a}}\right)$$

Enligt IFT gäller

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\, d\omega = \frac{I}{\pi}$$

Alltså har vi $I = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{a}}\right)$. □

Efter detta avslutande exempel på Fouriertransformen går vi nu in på Laplacetransformen.

- **Laplacetransformen.** Om vi i integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt$$

som definierar Fouriertransformen, byter $i\omega$ mot $s = \sigma + i\omega$ så får vi

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t}f(t)\, e^{-i\omega t}dt = F(\sigma + i\omega) \qquad (*)$$

Funktionen $F(s) = F(\sigma + i\omega)$ definieras som Laplacetransformen av $f(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Fouriertransformen av $f(t)$ är alltså inget annat än $F(i\omega)$, där F är Laplacetransformen. Sett på det sättet är alltså Fouriertransformen ett specialfall av Laplacetransformen. Å andra sidan är ju, enligt $(*)$, $F(\sigma + i\omega)$ Fouriertransformen av funktionen $e^{-\sigma t}f(t)$, så varje Laplacetransform kan också betraktas som en Fouriertransform.

Om transformerna är så lika kan man fråga sig varför vi ska ägna tid åt Laplacetransformen. Svaret är att transformerna gör olika jobb. Exempelvis går funktionen $(1+t^2)^{-1}$ alldeles utmärkt att Fouriertransformera (med transformen $\pi\, e^{-|\omega|}$). Laplacetransformen av samma funktion ges av

$$F(\sigma+i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{1+t^2}\, e^{-i\omega t} dt \tag{\#}$$

Om $\sigma > 0$ kommer funktionen

$$f_\sigma(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{1+t^2}$$

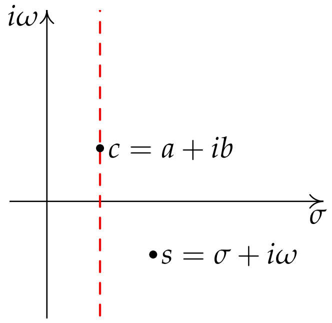
att gå exponentiellt mot ∞ då $t \to -\infty$, så integralen (#) divergerar (med besked). Lika illa är det om $\sigma < 0$. Det betyder att Laplacetransformen $F(s)$ bara är definierad för $s = i\omega$, så Laplacetransformen ger inget som vi inte redan har fått med Fouriertransformen.

- **Exempel.** Laplacetransformera $f(t) = \Theta(t)\, e^{ct}$, där $c = a + ib$. Går det att Fouriertransformera $f(t)$?

  Lösning. Vi får här

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{ct}\, e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_{t=0}^{t\to\infty} \\
&= \frac{1}{s-c} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(\sigma-a)t} e^{-i(\omega-b)t}}{s-c} \\
&= \frac{1}{s-c}
\end{aligned}$$

  för alla $s = \sigma + i\omega$, för vilka $\sigma > a$. Om däremot $\sigma \le a$ divergerar integralen. Laplacetransformen $F(s) = (s-c)^{-1}$ är alltså definierad i halvplanet $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, c$.



  Fouriertransformen av $f(t)$ är bara definierad om $a < 0$. Exemplet visar att om $f(t)$ är noll för (stora) negativa t så existerar Laplacetransformen även om funktionen är exponentiellt växande för positiva t. För alla Laplacetransformer $F(s)$ gäller, precis som ovan, att $F(s)$ är definierad i ett halvplan $\mathrm{Re}\, s > a$. $\square$

- **Anmärkning.** I många (alla?) tabeller över Laplacetransformer är det underförstått att de funktioner $f(t)$ som anges uppfyller $f(t) = 0$ för $t < 0$. I den tabell vi använder anges, till exempel, i (L.13) att funktionen e^{at} har transformen $(s-a)^{-1}$. Egentligen borde funktionen anges som $\Theta(t)\, e^{at}$. Någon kanske invänder att man slipper detta problem genom att definiera Laplacetransformen som

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

Men då mystifierar man det intima sambandet mellan Fourier- och Laplacetransformerna. Dessutom uppstår problem när $f(t)$ är en generaliserad funktion i origo, exempelvis $f(t) = \delta(t)$. För att få en klar definition måste den då skrivas som

$$F(s) = \int_{0^-}^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

o.s.v ad infinitum. Sådant är det sorgliga läget. Vill man ordentligt förstå en formel så får man själv skriva om den till klarspråk. Ta, till exempel, formeln (L.6). Den borde egentligen lyda

$$\Theta(t)\, f'(t) \qquad \sim \qquad sF(s) - f(0)$$

under förutsättningen att $f'(t)$ existerar och är kontinuerlig i en omgivning av origo (och att $F(s)$ är transformen av $\Theta(t)\, f(t)$). Med detta sagt kommer vi förstås att slarva lika mycket som alla andra!

- **Inversa Laplacetransformen.** Eftersom $F(\sigma + i\omega)$ är Fouriertransformen av funktionen $e^{-\sigma t} f(t)$ så ger IFT att

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\sigma + i\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

vilket kan skrivas som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\sigma + i\omega)\, e^{(\sigma + i\omega)\, t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(s)\, e^{s\, t} d\omega$$

Värdet på σ spelar ingen roll, bara $\sigma > a$.

- **Exempel.** Av det föregående exemplet följer att

$$\begin{aligned}
e^{ibt} &\sim \frac{1}{s - ib} \\
e^{-ibt} &\sim \frac{1}{s + ib} \\
\cos bt = \frac{1}{2}\left(e^{ibt} + e^{-ibt}\right) &\sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib}\right) = \frac{s}{s^2 + b^2} \\
\sin bt = \frac{1}{2i}\left(e^{ibt} - e^{-ibt}\right) &\sim \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ib} - \frac{1}{s + ib}\right) = \frac{b}{s^2 + b^2} \\
1 = \Theta(t) = e^{i0t} &\sim \frac{1}{s - 0i} = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Alla dessa transformer är definierade för $\operatorname{Re} s > 0$.

- **Exempel.** Bestäm Laplacetransformerna av

$$\text{(a)} \quad e^{at} \cos bt \quad \text{och} \quad \text{(b)} \quad e^{at} \sin bt$$

Lösning. (L.2) ger direkt

$$e^{at}\cos bt \sim \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$
$$e^{at}\sin bt \sim \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

□

- **Exempel.** Bestäm $f(t)$ om $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4s+29}$.

Lösning. Med hjälp av föregående exempel (eller (L.2), (L.15) och (L.16)) får vi

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{(s+2)^2+5^2} - \frac{2}{5}\,\frac{5}{(s+2)^2+5^2} \\ &\sim e^{-2t}\cos 5t - \frac{2}{5}\,e^{-2t}\sin 5t \end{aligned}$$

□

- **Exempel.** Bestäm $f(t)$ om $F(s) = \dfrac{s+4}{(s^2+8s+25)^2}$.

Lösning. Här verkar (L.5) vara användbar så vi försöker hitta en funktion $G(s)$ sådan att $F(s) = -G'(s)$. Då gäller att

$$\begin{aligned} G(s) &= -\int F(s)\,ds = -\int \frac{s+4}{((s+4)^2+3^2)^2}\,ds \quad \left(u = (s+4)^2+3^2,\ \frac{du}{2} = (s+4)\,ds\right) \\ &= \int \frac{-du}{2u^2} = 0 + \frac{1}{2u} = \frac{1}{6}\,\frac{3}{(s+4)^2+3^2} \end{aligned}$$

där integrationskonstanten blir 0, eftersom $G(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Enligt (L.2) och (L.16) gäller att $G(s) \sim g(t) = \Theta(t)\,\frac{1}{6}e^{-4t}\sin 3t$. Av (L.5) följer nu att

$$f(t) = tg(t) = \Theta(t)\,\frac{t\,e^{-4t}\sin 3t}{6}$$

□

- **Härledning av transformregler.** Reglerna för Laplacetransformen är snarlika reglerna för Fouriertransformen. De skillnader som uppstår beror på att funktionerna sätts till noll för negativa t. Låt oss, till exempel, härleda (L.6): Med partiell integration får vi

$$\begin{aligned} f'(t) &\sim \int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}dt = \left[f(t)\,e^{-st}\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty f(t)\,(-s)\,e^{-st}dt \\ &= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt = -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

(L.7) fås genom upprepning av (L.6). Regeln (L.5) fås, precis som motsvarande regel för Fouriertransformen, genom derivation under integraltecknet:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt \quad \text{ger direkt} \\ F'(s) &= \int_0^\infty (-t)\,f(t)\,e^{-st}dt \quad \text{alltså} \\ tf(t) &\sim -F'(s) \end{aligned}$$

Även faltningens utseende påverkas av att funktionerna är döda före $t = 0$:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(t-u)\,du = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du \tag{\#}$$

För vanliga funktioner fungerar (#) utmärkt. Men det är också mycket viktigt, inte minst i tillämpningarna, att kunna falta funktioner som innehåller impulskomponenter.

Antag, till exempel, att vi vill beräkna $f(t) * f(t)$, där $f(t) = \Theta(t) + \delta(t) + \delta(t-1)$. Försöker vi använda (#) uppstår problem, framför allt då $t = 0$ eller $t = 1$. I stället är det, i dylika situationer, bäst att se $f(t) * g(t)$ som inversa Laplacetransformen av $F(s)G(s)$. Eftersom $\Theta(t) \sim s^{-1}$, $\delta(t) \sim 1$ och $\delta(t-1) \sim e^{-s}$ får vi

$$F(s) = \frac{1}{s} + 1 + e^{-s} \quad \Longrightarrow \quad F(s)^2 = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{2}{s}\,e^{-s} + 1 + 2e^{-s} + e^{-2s}$$

Av detta följer (se (L.12), (L.11), (L.10) och (L.4)) att

$$f(t) * f(t) = t\Theta(t) + 2\Theta(t) + 2\Theta(t-1) + \delta(t) + 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

Av exemplet ser vi också att

$$\Theta(t) * \Theta(t) = t\,\Theta(t), \quad \delta(t) * \Theta(t) = \Theta(t), \quad \delta(t-1) * \Theta(t) = \Theta(t-1),$$

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t), \quad \delta(t) * \delta(t-1) = \delta(t-1), \quad \delta(t-1) * \delta(t-1) = \delta(t-2)$$

Samma tankegång kan användas för att derivera funktioner $f(t)$, som normalt inte går att derivera, förutsatt att de uppfyller $f(t) = 0$, för $t < 0$, så att Laplacetransformen $F(s)$ är definierad. Vi definierar $f'(t)$ som funktionen vars Laplacetransform är $sF(s)$.

Exempelvis har $\Theta(t)$ transformen s^{-1}. Alltså är $\Theta'(t)$ funktionen som har transformen $ss^{-1} = 1$. Det betyder att $\Theta'(t) = \delta(t)$. På samma sätt är $\delta^{(n)}(t)$ (n:te derivatan av $\delta(t)$) den (generaliserade) funktionen som har Laplacetransformen s^n.

För dessa, mer eller mindre underliga, funktioner gäller fortfarande de vanliga deriveringsreglerna.

- **Exempel.** Visa att om $g(t)$ är kontinuerlig i 0 så gäller $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$.

Lösning. Vi ska visa att $\delta(t)g(t)$ och $\delta(t)g(0)$ har samma Laplacetransform. För att göra det utnyttjar vi impulsfunktionens fundamentala egenskap att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)k(t)\,dt = k(0)$ för varje funktion $k(t)$ som är kontinuerlig i en omgivning av 0. Vi får

$$\begin{aligned} \delta(t)g(t) &\sim \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)g(t)\,e^{-st}dt = g(0)\,e^{-s0} = g(0) \\ \delta(t)g(0) &\sim \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)g(0)\,e^{-st}dt = g(0)\,e^{-s0} = g(0) \end{aligned}$$

Påståendet följer nu av entydighetssatsen för Laplacetransformer (två funktioner med samma transform är identiska). Speciellt gäller att $g(t)\delta(t) = 0$ om $g(0) = 0$. $\square$

- **Exempel.** Låt $f(t) = \Theta(t)\sin t$. Beräkna $f'(t)$ och $f''(t)$.

  Lösning. Vi får

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \Theta'(t)\sin t + \Theta(t)\cos t = \delta(t)\sin 0 + \Theta(t)\cos t = \Theta(t)\cos t \\
f''(t) &= \Theta'(t)\cos t - \Theta(t)\sin t = \delta(t)\cos 0 - \Theta(t)\sin t = \delta(t) - \Theta(t)\sin t = \delta(t) - f(t)
\end{aligned}
$$

  Av denna uträkning framgår även att funktionen $y(t) = f(t)$ är en lösning till differentialekvationen $y''(t) + y(t) = \delta(t)$. På samma sätt får vi att funktionen $y(t) = \Theta(t)\cos t$ är en lösning till differentialekvationen $y''(t) + y(t) = \delta'(t)$. $\square$

- **Exempel.** Bestäm Laplacetransformen $F(s)$ av $f(t) = \Theta(t)\dfrac{\sin t}{t}$.

  Lösning. Regeln (L.5) ger att

$$
tf(t) = \Theta(t)\sin t \sim \frac{1}{s^2+1} = -F'(s)
$$

  En integration ger

$$
F(s) = C - \arctan s
$$

  där C är en integrationskonstant som ska bestämmas. För Laplacetransformerna av alla vanliga funktioner gäller att $F(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Av detta följer här att

$$
0 = C - \lim_{s\to\infty} \arctan s = C - \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s
$$

  $\square$

- **Exempel.** Bestäm $f(t) = (\Theta(t)e^{-t}) * (2\Theta(t)\sin t)$.

  Lösning. Enligt (L.13) och (L.16) har vi

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s+1}\,\frac{2}{s^2+1} \quad \text{(partialbråksutv.)} \\
&= \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(inverstransform.)} \\
&\sim \Theta(t)\left(e^{-t} - \cos t + \sin t\right) = f(t)
\end{aligned}
$$

  $\square$

- **Exempel.** Finn alla lösningar till integral/differential-ekvationen

$$
2f(t) = f'(t) + \int_0^t f(t-u)\,du, \quad t > 0,
$$

  av formen $f(t) = \Theta(t)\varphi(t)$, där $\varphi(t)$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo.

Lösning. Ekvationen kan skrivas $2f(t) = f'(t) + f(t) * \Theta(t)$ eller

$$f'(t) = 2f(t) - f(t) * \Theta(t), \quad t > 0. \tag{$*$}$$

Om $f(t) = \Theta(t)\varphi(t)$ har vi

$$f'(t) = \Theta'(t)\varphi(t) + \Theta(t)\varphi'(t) = \delta(t)\varphi(t) + \Theta(t)\varphi'(t) = \varphi(0)\delta(t) + \Theta(t)\varphi'(t)$$

Laplacetransformen L av $f'(t)$ blir därför

$$\begin{aligned} L &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)\, e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \varphi(0)\delta(t)\, dt + \int_{0^+}^{\infty} \varphi'(t) e^{-st} dt \\ &= \varphi(0) + \left[\varphi(t)e^{-st}\right]_{t\to 0^+}^{t\to\infty} - \int_{0^+}^{\infty} \varphi(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= \varphi(0) - \varphi(0) + s\int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) \end{aligned}$$

Om vi Laplacetransformerar ($*$) får vi därför

$$sF(s) = 2F(s) - F(s)\,\frac{1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad F(s)\left(s - 2 + \frac{1}{s}\right) = 0,\ s > 0$$

vilket medför att $F(s) = 0$, då $s > 0$. Entydighetssatsen ger att $f(t) = 0$, för alla $t \in \mathbb{R}$.

Är detta hela sanningen? Faktiskt inte. För funktioner av formen $f(t) = \Theta(t)\varphi(t)$ gäller att

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \tag{\#}$$

Om vi Laplacetransformerar ($*$) i enlighet med den högra integralen i (#) så kommer därför högerledet i ($*$) att ha oförändrad transform. Däremot får vi, för transformen M, av $f'(t)$, att

$$\begin{aligned} M &= \int_{0^+}^{\infty} f'(t)\, e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} \varphi(0)\delta(t)\, dt + \int_{0^+}^{\infty} \varphi'(t) e^{-st} dt \\ &= 0 + \left[\varphi(t)e^{-st}\right]_{t\to 0^+}^{t\to\infty} - \int_{0^+}^{\infty} \varphi(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= -\varphi(0) + s\int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^+). \end{aligned}$$

Om vi sätter $f(0^+) = A$ blir därför den transformerade ekvationen

$$sF(s) - A = 2F(s) - F(s)\,\frac{1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad F(s)\left(s - 2 + \frac{1}{s}\right) = A,\ s > 0$$

Alltså har vi

$$F(s) = \frac{A}{s - 2 + \frac{1}{s}} = \frac{As}{s^2 - 2s + 1} = \frac{As}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{A}{(s-1)^2}$$

Inverstransformering ger

$$f(t) = A\Theta(t)(1+t)e^t$$

där A är en godtycklig konstant ($A = f(0^+)$). □

- **Anmärkning.** Om $f(t) = 0$ för $t < 0$ och vi definierar Laplacetransformen som

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

så gäller alltid (även för generaliserade funktioner) att $f'(t)$ har transformen $s\,F(s)$. I formlerna (L.6) och (L.7) har man därför utgått från att transformen är definierad genom

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Alltså borde (L.6) egentligen lyda $f'(t) \sim sF(s) - f(0^+)$ (och motsvarande för (L.7)). (L.8) bör, av samma anledning, skrivas

$$\int_{0^-}^{t} f(u)\, du \qquad \sim \qquad s^{-1}F(s)$$

Annars stämmer inte formeln då, till exempel, $f(t) = \delta(t)$.

- **Exempel.** Lös följande system av ordinära differentialekvationer

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) + 2y'(t) & = & \cos t - 4\sin t \\ 2x''(t) + y(t) & = & 3e^t \end{array} \right\} \quad \text{där} \quad x(0) = 3,\ x'(0) = 2,\ y(0) = 1.$$

Lösning. Denna typ av begynnelsevärdesproblem passar bra att lösa med Laplacetransformen. Systemet transformeras, med hjälp av (L.7), till

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(s) + 2sY(s) - 2 & = & \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{4}{s^2+1} \\ 2s^2X(s) - 6s - 4 + Y(s) & = & \dfrac{3}{s-1} \end{array} \right\}$$

där $x(t) \sim X(s)$ och $y(t) \sim Y(s)$. Vi löser nu ut $X(s)$, $Y(s)$ och faktoruppdelar nämnarna:

$$X(s) = \frac{3s^2 - s + 2}{(s-1)(s^2+1)} \qquad Y(s) = \frac{s^2 - 2s - 1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} \qquad Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{2s}{s^2+1}$$

Genom inverstransformering, med hjälp av (L.13) och (L.15), fås lösningen

$$x(t) = 2e^t + \cos t \qquad y(t) = -e^t + 2\cos t$$

□

- **Kausala system.** Vi har sett att för ett LTI-system med impulssvaret $h(t)$ och insignalen $x(t)$ ges utsignalen $y(t)$ av

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, x(t-u)\, du = \int_{0}^{\infty} h(u)\, x(t-u)\, du + \int_{-\infty}^{0} h(u)\, x(t-u)\, du$$

Av den andra integralen, $\int_{-\infty}^{0} h(u)\, x(t-u)\, du$, ser vi att om $h(u)$ är nollskild för negativa u så är värdet av $y(t)$ beroende av värdena $x(t-u)$, där $t-u > t$. I praktiken är detta förstås omöjligt, så det måste gälla att $h(u) = 0$ för $u < 0$, vilket innebär att

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{\infty} h(u)\, x(t-u)\, du \tag{$*$}$$

Sådana system, där utsignalens värde vid en viss tidpunkt bara beror av insignalens värden före denna tidpunkt, sägs vara kausala (orsaken måste infalla före sin verkan). Laplacetransformen $H(s)$, av $h(t)$, är systemets överföringsfunktion. Observera att $H(i\omega)$ då är samma funktion som vi i samband med Fouriertransformen betecknade som $H(\omega)$. Om $x(u) = 0$ för $u < 0$ så kan $(*)$ skrivas

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{t} h(u)\, x(t-u)\, du \tag{$**$}$$

och vi ser att $y(t) = 0$ för $t < 0$. Laplacetransformering av $(**)$ ger då att

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad \Longleftrightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Sammanfattningsvis kan vi alltså säga att Laplacetransformen är användbar vid systemanalys bara om systemet är kausalt och vi bara betraktar insignaler $x(t)$ sådana att $x(t) = 0$ då $t < 0$. För analys av icke-kausala system får man hålla sig till Fouriertransformen.

- **Exempel.** Finn impulssvaret för det kausala systemet, som ges av differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t)$$

Lösning. Vi ska finna en lösning till differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \delta(t)$$

sådan att $y(t) = 0$ då $t < 0$. Laplacetransformation av ekvationen ger

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = 1 \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{2}\, \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Med hjälp av (L.16) får vi

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\, e^{-t} \sin 2t$$

Det betyder att impulssvaret är $h(t) = \frac{1}{2}\Theta(t)\, e^{-t} \sin 2t$.

För övnings skull verifierar vi att $y = 2h(t)$ är en lösning till $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 2\delta(t)$. Vi får

$$\begin{aligned}
y &= 2h(t) = \Theta(t)\, e^{-t} \sin 2t \\
y' &= \delta(t)\, e^{-t} \sin 2t - \Theta(t)\, e^{-t} \sin 2t + 2\Theta(t)\, e^{-t} \cos 2t = \Theta(t)\, (-e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t) \\
y'' &= \delta(t)\, (-e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t) + \Theta(t)\, (e^{-t} \sin 2t - 2e^{-t} \cos 2t - 2e^{-t} \cos 2t - 4e^{-t} \sin 2t) \\
&= 2\delta(t) + \Theta(t)\, (-3e^{-t} \sin 2t - 4e^{-t} \cos 2t)
\end{aligned}$$

vilket ger

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 2\delta(t) + \Theta(t)\, ((5-2-3)e^{-t} \sin 2t + (4-4)e^{-t} \cos 2t) = 2\delta(t)$$

□

- **Stabilitet.** Vi påminner om att en funktion $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, sägs vara begränsad om det finns en konstant C sådan att $|x(t)| \leq C$, för alla t. Ett LTI-system, kausalt eller ej, sägs vara BIBO-stabilt, eller helt enkelt stabilt, om varje begränsad insignal $x(t)$ ger upphov till en begränsad utsignal $y(t) = h(t) * x(t)$, där $h(t)$, $-\infty < t < \infty$, är impulssvaret. BIBO står här för *Bounded Input Bounded Output*.

- **Sats.** Systemet är stabilt om och endast om $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$.

Bevis. Om $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = K < \infty$ och $|x(t)| \leq C$ så får vi

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, x(t-u)\, du \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|\, |x(t-u)|\, du \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|\, du = CK$$

för alla t, så utsignalen är begränsad. Antar vi i stället att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \infty$ så måste endera $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |h(t)|\, dt = \infty$ eller $\displaystyle\int_{0}^{\infty} |h(t)|\, dt = \infty$. Vi antar att det senare är fallet. Funktionen $h(t)$ är styckvis kontinuerlig (ett antagande vi gör för alla funktioner i den här kursen). För $-\infty < u < 0$ definierar vi nu $x(u) = 1$ om $h(-u) \geq 0$ och $x(u) = -1$ om $h(-u) < 0$. För $0 \leq u < \infty$ sätter vi $x(u) = 0$. Då gäller att

$$y(0) = \int_{0}^{\infty} x(-u) h(u)\, du = \int_{0}^{\infty} |h(u)|\, du = \infty$$

så utsignalen är obegränsad. $\square$

- **Exempel.** Vi såg ovan att LTI-systemet som ges av differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t)$$

har impulssvaret $h(t) = \frac{1}{2}\Theta(t)\, e^{-t} \sin 2t$. Eftersom

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2}\, e^{-t} |\sin 2t|\, dt \leq \int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2}\, e^{-t}\, dt = \tfrac{1}{2}$$

så är detta system stabilt. Det kan även avgöras direkt från överföringsfunktionen $H(s)$. I detta fall gäller att

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Nämnarens nollställen, de så kallade polerna, är $s_{12} = -1 \pm 2i$. Båda polerna har negativ realdel (-1).

Det gäller generellt att systemet är stabilt om och endast om överföringsfunktionens samtliga poler har negativ realdel.