Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Transformmetoder, 5 hp
ES, gyL, Q, W
2012-10-29

Kryssproblem (redovisningsuppgifter).

Till var och en av de tio lektionerna hör två problem som du ska försöka lösa.

I kursplaneringen, filen `kursptmht12.pdf` på kurshemsidan, beskrivs mer utförligt hur systemet med redovisningsuppgifter fungerar. Här påpekar vi bara följande:

För att kryssa en uppgift behövs bara att du kan redovisa ett allvarligt **försök** att lösa uppgiften. Även om du misslyckas med att få fram en komplett lösning kan du säkert komma en bit på väg och du kan beskriva vilka steg som fattas för att lösningen ska bli klar.

Om du kryssat minst 50%, respektive minst 80%, av redovisningsuppgifterna får du 1, respektive 2, bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Betyget du får på kursen kommer bara att bero på hur du lyckas på sluttentan. Betygen du får (eller ger) under lektionerna kommer inte att vägas in på något sätt. Givetvis kommer din aktivitet (eller brist på aktivitet) under lektionerna att i hög grad påverka ditt kursbetyg. Har du två bonuspoäng ligger du mycket bra till!

Bonuspoängen adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen i december 2012 **men ej vid något annat tentamenstillfälle**.

Uppgifter till lektion 1:

Nedanstående problem kan förekomma vid tentor på tidigare kurser, så det är fråga om en repetition.

1. (a) Partialbråksuppdela $F(s) = \dfrac{2s^5 - 3s^4 + 2s^3 - s^2 + 2s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 1}$.

(b) Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt \, dt$$

där n är ett positivt heltal.

2. (a) Skriv, med hjälp av Eulers formler, $f(t) = 8\cos^3 t \sin^4 t$ som en summa av termer av typen $a \cos \omega t$.

(b) Låt

$$F(w) = \int_0^{\infty} t^w e^{-t} \, dt, \quad w > -1.$$

Visa att $F(w) = w\,F(w-1)$, för $w > 0$, och beräkna $F(0)$, $F(3)$ och $F(4)$. Vad är $F(n)$, för heltal $n \geq 0$?

Uppgifter till lektion 2:

1. Funktionen $f(t)$ är jämn och periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $f(t) = 1 - t$. Bestäm f:s Fourierserie på såväl reell som komplex form. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

2. Funktionen $g(t)$ är udda och periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $g(t) = 1 - t$. Bestäm g:s Fourierserie på såväl reell som komplex form. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Uppgifter till lektion 3:

1. Funktionen $f(t)$ är periodisk, med perioden 2π. För $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ gäller att $f(t) = t$ och för $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ gäller att $f(t) = \pi - t$. Bestäm, med hjälp av Fourierserien som bestämdes i första redovisningsuppgiften till lektion 2, f:s Fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall.

Ledning: Funktionen i första redovisningsuppgiften till lektion 2 har Fourierserien

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

2. Funktionen $g(t)$ är periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $g(t) = 0$, medan $g(t) = 2(1+t)$, för $-1 < t < 0$. Bestäm g:s Fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall.

Ledning: Funktionen i andra redovisningsuppgiften till lektion 2 har Fourierserien

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

Uppgifter till lektion 4:

1. Funktionen $f(t)$ är jämn. För $0 < t < 2$ gäller $f(t) = 2 - t$ och $f(t) = 0$ för $2 < t < \infty$. Bestäm Fouriertransformen av $f(t)$ och använd denna för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}\, d\omega \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4}\, d\omega$$

2. Funktionen $g(t)$ är udda. För $0 < t < 2$ gäller $g(t) = 2 - t$ och $g(t) = 0$ för $2 < t < \infty$. Bestäm Fouriertransformen av $g(t)$ och använd denna för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right)\left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right) d\omega \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{(x - \sin x)^2}{x^4}\, dx$$

Uppgifter till lektion 5:

1. Bestäm funktionen $f(t)$ som har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{(\omega+1)\, e^{i(\omega+1)}}{(\omega^2+2\omega+5)^2}$$

2. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}$$

Beräkna $f(0)$ och

$$\int_0^\infty \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}\, d\omega$$

Uppgifter till lektion 6:

1. Lös följande system av ordinära differentialekvationer

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t)+y'(t)-y(t) & = & e^t \\ x'(t)+x(t)-2y(t) & = & 1 \end{array}\right\} \quad \text{där} \quad x(0)=y(0)=1.$$

2. (a) Låt $g(t)=\Theta(t)\,t^{\alpha}$, där $\alpha>-1$. Bestäm Laplacetransformen $G(s)$, av $g(t)$, för $s>0$.

(b) Lös integralekvationen $\displaystyle\int_0^t \frac{f(t-u)}{\sqrt{u}}\,du=\sqrt{t}, \quad 0<t<\infty.$

Ledning: Se uppgift 2(b), till lektion 1.

Uppgifter till lektion 7:

1. (a) Ett LTI-system ges av differentialekvationen

$$4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = x(t)$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar. Avgör om systemet är stabilt.

(b) Funktionen $f(t),\ t \geq 0$, har Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}$$

Bestäm $f(t)$ och skissa f:s graf.

2. Avgör om det finns en funktion $y(t)$, sådan att $y(t) = 0$ för $t \leq 0$, $y'(t)$, $y''(t)$ existerar och är kontinuerliga för $-\infty < t < \infty$ och, för $t > 0$, uppfyller differential/integral-ekvationen

$$y'(t) - \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du = t\,\sin t.$$

Uppgifter till lektion 8:

1. Funktionen $h(t)$ har Laplacetransformen

$$H(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+4s+6)}$$

(a) Avgör först, genom att betrakta $H(s)$, om gränsvärdet $L = \lim_{t\to\infty} h(t)$ existerar och bestäm i så fall L. Beräkna sedan $h(t)$ och undersök gränsvärdet direkt.

(b) Undersök på samma sätt gränsvärdet $M = \lim_{t\to 0^+} h(t)$.

2. Bestäm *stegsvaret*, det vill säga lösningen då $x(t) = \Theta(t) =$ Heavisidefunktionen, till systemet

$$y'''(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 4y(t) = x(t), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Observera att, om inget annat sägs, så antas alla funktioner (här $x(t)$, $y(t)$) vara noll för $t < 0$.

Uppgifter till lektion 9:

1. Lös vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 8 \sin x \cos^3 x, & u_t(x,0) = 8 \sin^3 x \cos x, & 0 < x < \pi \end{array} \right\}$$

2. Lös värmeledningsekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 1, & t > 0 \\ u(x,0) = 2 - x, & & 0 < x < 1 \end{array} \right\}$$

Uppgifter till lektion 10:

1. (a) Z-transformera talföljden $x(n) = \dfrac{n+3}{3^n}\,\Theta(n-2)$.

(b) Bestäm inversa z-transformen till $X(z) = \dfrac{z}{(2z-1)(6z^2-5z+1)}$.

2. (a) Bestäm impulssvaret och överföringsfunktionen till LTI-systemet som ges av differensekvationen

$$6y(n+2) + 5y(n+1) + y(n) = x(n).$$

Avgör även om systemet är stabilt.

(b) Bestäm $y(n),\ n \geq 0$, om $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ och

$$4y(n+2) + 4y(n+1) + y(n) = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \qquad 0 \leq n < \infty.$$