Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Transformmetoder, 5 hp
ES, gyL, Q, W
2012-10-29

Lösningar till kryssproblemen.

Uppgifter till lektion 1:

1. (a) Partialbråksuppdela $F(s) = \dfrac{2s^5 - 3s^4 + 2s^3 - s^2 + 2s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 1}$.

(b) Skriv, med hjälp av Eulers formler, $f(t) = 8\cos^3 t \sin^4 t$ som en summa av termer av typen $a \cos \omega t$.

Lösning. (a) Med polynomdivision fås

$$F(s) = Q(s) + \frac{R(s)}{N(s)} = 2s + 1 + \frac{s^2 + 2s - 1}{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 1}$$

Genom att pröva oss fram får vi

$$N(s) = (s-1)(s^3 - s^2 + s - 1) = (s-1)^2(s^2+1)$$

Vi gör partialbråksuppdelningsansatsen

$$\begin{aligned}
\frac{R(s)}{N(s)} &= \frac{s^2+2s-1}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\
&= \frac{(A+C)s^3 + (-A+B-2C+D)s^2 + (A+C-2D)s + (-A+B+D)}{(s-1)^2(s^2+1)}
\end{aligned}$$

Identifikation av täljarna ger oss ekvationssystemet

$$A + C = 0, \quad -A + B - 2C + D = 1, \quad A + C - 2D = 2, \quad -A + B + D = -1,$$

som har den entydiga lösningen $A = 1,\ B = 1,\ C = -1,\ D = -1$. Alltså har vi

$$F(s) = 2s + 1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

(b) Med hjälp av Eulers formler och binomialformeln får vi

$$\begin{aligned}
16f(t) &= \left(e^{it} + e^{-it}\right)^3 \left(e^{it} - e^{-it}\right)^4 \\
&= \left(e^{2it} - e^{-2it}\right)^3 \left(e^{it} - e^{-it}\right) \\
&= \left(e^{6it} - e^{-6it} - 3e^{2it} + 3e^{-2it}\right) \left(e^{it} - e^{-it}\right) \\
&= e^{7it} + e^{-7it} - e^{5it} - e^{-5it} - 3e^{3it} - 3e^{-3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} \\
&= 2\cos 7t - 2\cos 5t - 6\cos 3t + 6\cos t
\end{aligned}$$

Alltså har vi

$$f(t) = \tfrac{1}{8}\cos 7t - \tfrac{1}{8}\cos 5t - \tfrac{3}{8}\cos 3t + \tfrac{3}{8}\cos t$$

$\square$

2. (a) Beräkna integralen

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt \, dt$$

där n är ett positivt heltal.

(b) Låt

$$F(w) = \int_0^{\infty} t^w e^{-t} \, dt, \quad w > -1.$$

Visa att $F(w) = w\,F(w-1)$, för $w > 0$, och beräkna $F(0)$, $F(3)$ och $F(4)$. Vad är $F(n)$, för heltal $n \geq 0$?

Lösning. (a) Då integranden är jämn får vi, med partiell integration

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (2t) \cos nt \, dt = \left[(2t) \frac{\sin nt}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} (2) \frac{\sin nt}{n} \, dt \\ &= 0 - \left[(2) \frac{-\cos nt}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = (-2) \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \end{aligned}$$

(b) Med partiell integration får vi

$$F(w) = \left[-t^w e^{-t} \right]_{t=0}^{t \to \infty} - \int_0^{\infty} -w\, t^{w-1} e^{-t} \, dt = w\,F(w-1)$$

Vi har

$$F(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = 1.$$

Formeln $F(w) = w\,F(w-1)$ ger sedan

$$F(3) = (3)F(2) = (3)(2)F(1) = (3)(2)(1)F(0) = 3! \quad \text{och} \quad F(4) = (4)F(3) = (4)(3!) = 4!$$

Med induktion visas sedan, på samma sätt, att $F(n) = n!$, för heltal $n \geq 0$.

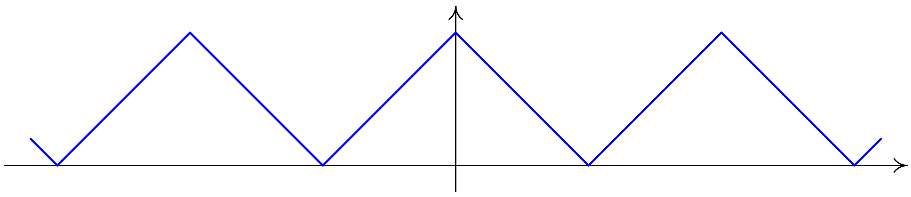
$\square$

Uppgifter till lektion 2:

1. Funktionen $f(t)$ är jämn och periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $f(t) = 1 - t$. Bestäm f:s Fourierserie på såväl reell som komplex form. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Lösning. $T = 2$ ger $\Omega = \pi$.



Då $f(t)$ är jämn så gäller $b_n = 0$, för alla n, och

$$\begin{aligned} a_n &= (2) \int_0^1 f(t) \cos n\pi t \, dt = (2) \int_0^1 (1-t) \cos n\pi t \, dt \\ &= (2) \left[(1-t) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^{t=1} - (2) \int_0^1 (-1) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \, dt \\ &= 0 - (2) \left[\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = (2) \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

då $n > 0$. För $n = 0$ får vi $a_0 = (2) \int_0^1 (1-t) \, dt = 1$. Då $1 - \cos n\pi = 0$, för jämna $n > 0$, och $1 - \cos n\pi = 2$, för $n = 2k+1$, ser vi att $f(t)$ har Fourierserien

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

Serien konvergerar mot $f(t)$, för alla $t \in \mathbb{R}$, eftersom $f(t)$ är kontinuerlig och $f'_+(t)$, $f'_-(t)$ existerar överallt. Genom att sätta in $t = 0$ får vi

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Parsevals formel ger

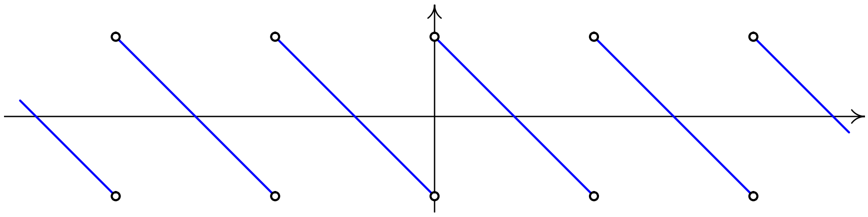
$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} f(t)^2 \, dt = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$\square$

2. Funktionen $g(t)$ är udda och periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $g(t) = 1 - t$. Bestäm g:s Fourierserie på såväl reell som komplex form. Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall. Använd Fourierserien för att beräkna summorna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Lösning. $T = 2$ ger $\Omega = \pi$.



Då $g(t)$ är udda så gäller $a_n = 0$, för alla n, och

$$\begin{aligned} b_n &= (2)\int_0^1 g(t)\sin n\pi t\,dt = (2)\int_0^1 (1-t)\sin n\pi t\,dt \\ &= (2)\left[(1-t)\,\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{t=0}^{t=1} - (2)\int_0^1 (-1)\,\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\,dt \\ &= \frac{2}{n\pi} - 0 = \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

då $n > 0$. Alltså har $g(t)$ Fourierserien

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

Eftersom $g(t^+)$, $g(t^-)$, $g'_+(t)$ och $g'_-(t)$ existerar överallt gäller att serien konvergerar för alla $t \in \mathbb{R}$ och summan är lika med $\frac{1}{2}\left(g(t^+) + g(t^-)\right)$, som är lika med $g(t)$ förutom då $t = 2k$ (jämna heltalspunkter).

Genom att sätta in $t = \frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{1}{2} = g(\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

vilket ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Parsevals formel ger

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_{-1}^{1} g(t)^2\,dt = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$

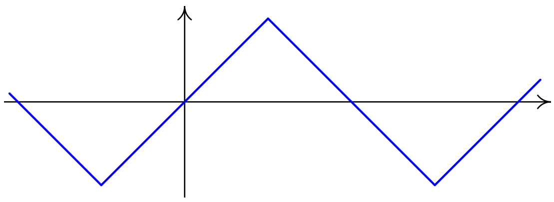
Uppgifter till lektion 3:

1. Funktionen $f(t)$ är periodisk, med perioden 2π. För $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ gäller att $f(t) = t$ och för $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ gäller att $f(t) = \pi - t$. Bestäm, med hjälp av Fourierserien som bestämdes i första redovisningsuppgiften till lektion 2, f:s Fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall.

Lösning. Låt F beteckna funktionen i första redovisningsuppgiften till lektion 2. Vi skissar f:s graf och jämför med grafen för F:



Vi ser att f:s graf, bortsett från förskjutningar, är identisk med F:s graf, förstorad med faktorn π. Närmare bestämt gäller att

$$f(\pi t) = \pi F(t - \tfrac{1}{2}) - \frac{\pi}{2}$$

För F har vi den överallt konvergenta utvecklingen

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

i Fourierserie. Det ger oss

$$\begin{aligned} f(\pi t) = \pi F(t - \tfrac{1}{2}) - \frac{\pi}{2} &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi(t - \frac{1}{2})}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin(2k+1)\pi t)\,(\sin(2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(2k+1)t}{(2k+1)^2}$$

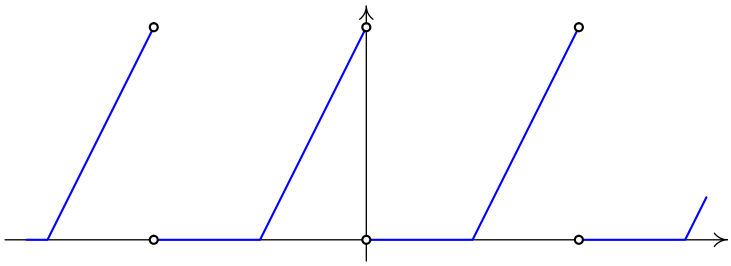
med konvergens överallt. $\square$

2. Funktionen $g(t)$ är periodisk, med perioden 2. För $0 < t < 1$ gäller att $g(t) = 0$, medan $g(t) = 2(1+t)$, för $-1 < t < 0$. Bestäm g:s Fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som serien konvergerar och bestäm seriens summa $S(t)$ i dessa fall.

Lösning. Vi har här grafen



Låt G beteckna funktionen i andra redovisningsuppgiften till lektion 2. Vi skriver $g(t)$ som summan av en jämn och en udda funktion:

$$g(t) = \frac{g(t) + g(-t)}{2} + \frac{g(t) - g(-t)}{2} = g_j(t) + g_u(t)$$

Då gäller $g_j(t) = 1 + t = g_u(t)$, för $-1 < t < 0$, vilket ger $g_j(t) = 1 - t$ och $g_u(t) = t - 1$, för $0 < t < 1$. Alltså har vi $g_j(t) = F(t)$ och $g_u(t) = -G(t)$, där F, G är som ovan. Det ger oss direkt

$$g(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

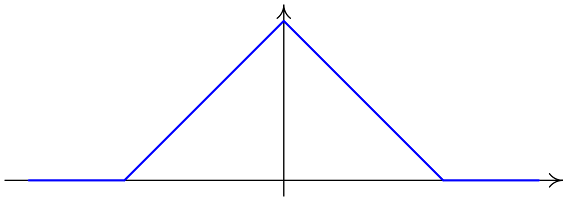
$\square$

Uppgifter till lektion 4:

1. Funktionen $f(t)$ är jämn. För $0 < t < 2$ gäller $f(t) = 2 - t$ och $f(t) = 0$ för $2 < t < \infty$. Bestäm Fouriertransformen av $f(t)$ och använd denna för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}\, d\omega \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4}\, d\omega$$

Lösning. Grafen för f har utseendet



Eftersom funktionen är jämn ges Fouriertransformen av

$$\begin{aligned} F(\omega) &= (2)\int_0^2 (2-t)\cos\omega t\, dt \\ &= (2)\left[(2-t)\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_{t=0}^{t=2} - (2)\int_{t=0}^{t=2}(-1)\frac{\sin\omega t}{\omega}\, dt \\ &= 0 - (2)\left[\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\right]_{t=0}^{t=2} = (2)\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2} = \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2} \end{aligned}$$

Inversionsformeln ger

$$\begin{aligned} 2 = f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^0 d\omega \\ &= \frac{8}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega = \frac{4}{\pi}\, I_1 \end{aligned}$$

Följaktligen gäller $I_1 = \frac{1}{2}\,\pi$. Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = (2)\int_0^2 (2-t)^2\, dt = (2)\left[-\frac{(2-t)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Plancherels formel ger därför

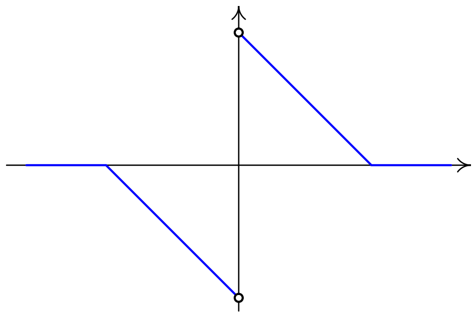
$$\frac{16}{3} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{16\sin^4\omega}{\omega^4}\, d\omega = \frac{16}{\pi}\, I_2$$

Alltså har vi $I_2 = \frac{1}{3}\,\pi$. □

2. Funktionen $g(t)$ är udda. För $0 < t < 2$ gäller $g(t) = 2 - t$ och $g(t) = 0$ för $2 < t < \infty$. Bestäm Fouriertransformen av $g(t)$ och använd denna för att beräkna integralerna

$$I_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right)\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right) d\omega \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{(x - \sin x)^2}{x^4}\, dx$$

Lösning. Grafen för g har utseendet



Eftersom funktionen är udda ges Fouriertransformen av

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i) g(t) \sin \omega t \, dt = (-2i) \int_0^2 (2-t) \sin \omega t \, dt \\
&= (-2i) \left[(2-t) \frac{-\cos \omega t}{\omega} \right]_{t=0}^{t=2} + (2i) \int_{t=0}^{t=2} (-1) \frac{-\cos \omega t}{\omega} \, dt \\
&= (-2i)(2) \frac{1}{\omega} + (2i) \left[\frac{\sin \omega t}{\omega^2} \right]_{t=0}^{t=2} \\
&= -\frac{4i}{\omega} + (2i) \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} = (-2i) \left(\frac{2}{\omega} - \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right)
\end{aligned}$$

Inversionsformeln ger

$$\begin{aligned}
1 = g(1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \, e^{i\omega} d\omega \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} (i) G(\omega) \, \sin \omega \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (2) \left(\frac{2}{\omega} - \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right) \sin \omega \, d\omega \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} (2) \left(1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right) \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right) d\omega = \frac{4}{\pi} \, I_1
\end{aligned}$$

Följaktligen gäller $I_1 = \frac{1}{4} \pi$. Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = (2) \int_0^2 (2-t)^2 \, dt = (2) \left[-\frac{(2-t)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Plancherels formel ger därför

$$\begin{aligned}
\frac{16}{3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} (4) \left(\frac{2\omega - \sin 2\omega}{\omega^2} \right)^2 d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (2^5) \frac{(2\omega - \sin 2\omega)^2}{(2\omega)^4} \, (2 d\omega) = \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x - \sin x)^2}{x^4} \, dx = \frac{32}{\pi} \, I_2
\end{aligned}$$

Alltså har vi $I_2 = \frac{1}{6} \pi$. □

Uppgifter till lektion 5:

1. Bestäm funktionen $f(t)$ som har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{(\omega+1)\,e^{i(\omega+1)}}{(\omega^2+2\omega+5)^2}$$

Lösning. Av (F.2) följer att om $g(t) = e^{it} f(t)$ så gäller

$$G(\omega) = F(\omega-1) = \frac{\omega\,e^{i\omega}}{((\omega-1)^2+2(\omega-1)+5)^2} = \frac{\omega\,e^{i\omega}}{(\omega^2+4)^2}$$

Enligt (F.3) har då funktionen $h(t) = g(t-1)$ Fouriertransformen

$$H(\omega) = e^{-i\omega}G(\omega) = \frac{\omega}{(\omega^2+4)^2}$$

Av (F.5) följer sedan att funktionen $k(t) = (16)h(t/2)/2$ har Fouriertransformen

$$K(\omega) = (16)H(2\omega) = \frac{(16)(2\omega)}{(4\omega^2+4)^2} = \frac{2\omega}{(\omega^2+1)^2} = -\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\omega^2+1}$$

Eftersom

$$\frac{1}{\omega^2+1} \sim \frac{1}{2}\,e^{-|t|}$$

betyder detta, enligt (F.6), att $k(t) = \frac{1}{2}\,it\,e^{-|t|}$. Alltså har vi

$$\begin{aligned}
(8)h(t/2) = it/2\,e^{-|t|} \quad &\Longrightarrow \quad h(t) = \frac{it}{8}\,e^{-|2t|} \\
g(t-1) = h(t) = \frac{it}{8}\,e^{-|2t|} \quad &\Longrightarrow \quad g(t) = \frac{i(t+1)}{8}\,e^{-2|t+1|} \\
e^{it}f(t) = g(t) \quad &\Longrightarrow \quad f(t) = e^{-it}g(t) = \frac{i(t+1)}{8}\,e^{-2|t+1|-it}
\end{aligned}$$

□

2. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen

$$F(\omega) = \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}$$

Beräkna $f(0)$ och

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-\omega}\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

Lösning. Enligt (F.10) och (F.12) gäller att

$$G(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega} \sim \tfrac{1}{2}\,\chi_{[-1,1]}(t) = g(t) \quad \text{och} \quad H(\omega) = e^{-|\omega|} \sim \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2} = h(t)$$

Eftersom $F(\omega) = G(\omega)H(\omega)$ gäller att $f(t) = g(t) * h(t)$. Alltså har vi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + (t-u)^2} \, du$$

Speciellt har vi

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2} \, du = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan u\right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{4}$$

Inversa Fouriertransformen ger sedan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \, d\omega \quad (F(\omega) \text{ är jämn}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\omega) \, d\omega = \frac{1}{\pi} \, I \end{aligned}$$

Det följer att $I = \frac{1}{4}\,\pi$. $\square$

Uppgifter till lektion 6:

1. Lös följande system av ordinära differentialekvationer

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) + y'(t) - y(t) & = & e^t \\ x'(t) + x(t) - 2y(t) & = & 1 \end{array} \right\} \quad \text{där} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Lösning. Laplacetransformation, där $x(t) \sim X(s) = X$, $y(t) \sim Y(s) = Y$, ger systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X + sY - 1 - Y & = & \dfrac{1}{s-1} \\ sX - 1 + X - 2Y & = & \dfrac{1}{s} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X + (s-1)Y & = & \dfrac{s}{s-1} \\ (s+1)X - 2Y & = & \dfrac{s+1}{s} \end{array} \right\}$$

Systemet har lösningen

$$X = \frac{s^3 + s^2 - s + 1}{s(s-1)(s^2+1)}, \qquad Y = \frac{s^3+1}{s(s-1)(s^2+1)}$$

X och Y ska nu partialbråksutvecklas:

$$\begin{aligned} X = \frac{s^3 + s^2 - s + 1}{s(s-1)(s^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ &= \frac{A(s^3 - s^2 + s - 1) + B(s^3 + s) + (Cs+D)(s^2 - s)}{s(s-1)(s^2+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)s^3 + (-A-C+D)s^2 + (A+B-D)s - A}{s(s-1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Identifikation av täljarna ger $A = -1$, $B = C = D = 1$. Alltså har vi

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

På samma sätt får vi

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1}$$

Inverstransformering ger sedan

$$x(t) = -1 + e^t + \cos t + \sin t, \qquad y(t) = -1 + e^t + \cos t.$$

$\square$

2. (a) Låt $g(t) = \Theta(t)\, t^\alpha$, där $\alpha > -1$. Bestäm Laplacetransformen $G(s)$, av $g(t)$, för $s > 0$.

(b) Lös integralekvationen $\displaystyle\int_0^t \frac{f(t-u)}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{t}, \quad 0 < t < \infty.$

Lösning. Vi påminner först om att i uppgift 2(b), till lektion 1, definierade vi fakultetsfunktionen

$$w! = \int_0^\infty t^w e^{-t}\, dt,$$

för alla reella tal $w > -1$, och visade att $w! = w(w-1)!$, för alla reella tal $w > 0$. Vi visade också att då w är ett positivt heltal gäller $w! = (1)(2)\ldots(w)$.

(a) Enligt definitionen av Laplacetransformen har vi

$$\begin{aligned}
G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^{\alpha}\, e^{-st} dt \\
&= \text{(subst. } u = st,\, t = s^{-1}u,\, dt = s^{-1}du) = \int_{u=0}^{\infty} (s^{-1}u)^{\alpha}\, e^{-u} s^{-1} du \\
&= s^{-1-\alpha} \int_{u=0}^{\infty} u^{\alpha}\, e^{-u} du = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

Det betyder att formeln (L.12) är giltig för alla reella $n > -1$.

(b) Integralekvationen kan skrivas

$$f(t) * (t^{-\frac{1}{2}}) = t^{\frac{1}{2}}, \qquad t > 0.$$

Laplacetransformering ger

$$F(s)\, \frac{(-\frac{1}{2})!}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\frac{1}{2})!}{s^{\frac{3}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{(\frac{1}{2})!}{(-\frac{1}{2})!}\, \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2s}$$

Enligt (L.11) gäller därför att $f(t) = \frac{1}{2}\, \Theta(t)$.

$\square$

Uppgifter till lektion 7:

1. (a) Ett LTI-system ges av differentialekvationen

$$4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = x(t)$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar. Avgör om systemet är stabilt.

(b) Funktionen $f(t),\ t \geq 0$, har Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}$$

Bestäm $f(t)$ och skissa f:s graf.

Lösning. Med hjälp av formelsamlingen får vi:

(a) Laplacetransformation, där $x(t) \sim X(s)$, $y(t) \sim Y(s)$ och $H(s)$ är överföringsfunktionen, ger

$$(4s^2 + 4s + 1)Y(s) = X(s), \quad \Longrightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2}$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.14), ger impulssvaret $h(t) = \frac{1}{4}\,\Theta(t)\,t\,e^{-\frac{1}{2}t}$ Systemet är stabilt, eftersom alla poler har negativa realdelar.

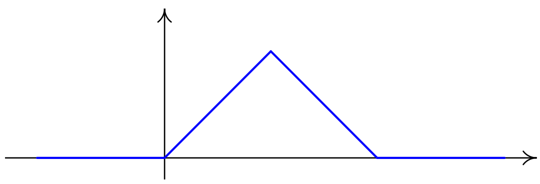
(b) Vi har

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.4) och (L.12), ger

$$f(t) = t\,\Theta(t) - 2(t-1)\Theta(t-1) + (t-2)\Theta(t-2)$$

Det betyder att $f(t) = 0$, för $t \leq 0$, $f(t) = t$, för $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = 2 - t$, för $1 \leq t \leq 2$ och $f(t) = 0$, för $2 \leq t$.



□

2. Avgör om det finns en funktion $y(t)$, sådan att $y(t) = 0$ för $t \leq 0$, $y'(t)$, $y''(t)$ existerar och är kontinuerliga för $-\infty < t < \infty$ och, för $t > 0$, uppfyller differential/integral-ekvationen

$$y'(t) - \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du = t\,\sin t.$$

Lösning. Ekvationen kan skrivas

$$y'(t) - y(t) * \cos t = t\ \sin t.$$

Med (L.6), (L.15) och (L.18) fås ekvationens transform

$$sY(s) - Y(s)\,\frac{s}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad Y(s) = \frac{2}{s^2(s^2+1)} = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2+1}$$

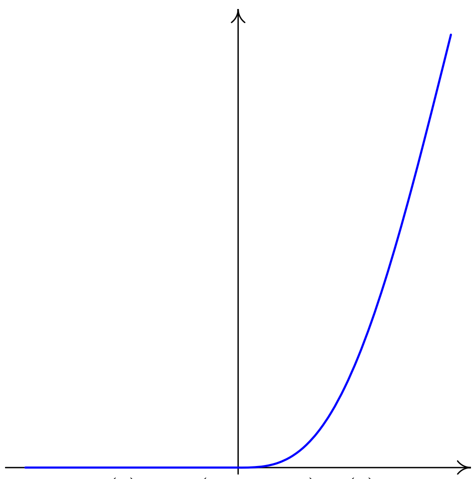
(L.12) och (L.16) ger sedan

$$y(t) = 2(t - \sin t)\Theta(t)$$

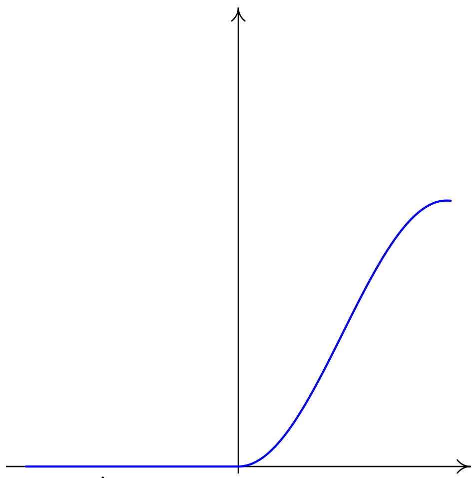
Funktionen $y(t)$ är kontinuerlig för $-\infty < t < \infty$ och $y(t) = 0$ för $t \leq 0$. För derivatorna har vi

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2(1-\cos t)\Theta(t) + 2(t-\sin t)\delta(t) = 2(1-\cos t)\Theta(t) \\ y''(t) &= 2(\sin t)\Theta(t) + 2(1-\cos t)\delta(t) = 2\sin t\,\Theta(t) \\ y'''(t) &= 2\cos t\,\Theta(t) + 2\sin t\,\delta(t) = 2\cos t\,\Theta(t) \end{aligned}$$

Vi ser att $y'(t)$ och $y''(t)$ existerar och är kontinuerliga för $-\infty < t < \infty$, medan $y'''(t)$ är diskontinuerlig för $t = 0$ ($y'''(0^-) = 0$, $y'''(0^+) = 2$).



$y(t) = 2(t - \sin t)\Theta(t).$



$y'(t) = 2(1 - \cos t)\Theta(t).$

□

Uppgifter till lektion 8:

1. Funktionen $h(t)$ har Laplacetransformen

$$H(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+4s+6)}$$

(a) Avgör först, genom att betrakta $H(s)$, om gränsvärdet $L = \lim_{t\to\infty} h(t)$ existerar och bestäm i så fall L. Beräkna sedan $h(t)$ och undersök gränsvärdet direkt.

(b) Undersök på samma sätt gränsvärdet $M = \lim_{t\to 0^+} h(t)$.

Lösning. (a) Vi partialbråksutvecklar $H(s)$ (några detaljer överhoppas):

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2+1}{s(s^2+4s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+2)+C}{(s+2)^2+2} \\ &= \frac{A(s^2+4s+6)+B(s^2+2s)+Cs}{(s+2)^2+2} = \frac{(A+B)s^2+(4A+2B+C)s+6A}{s((s+2)^2+2)} \\ &= (A=1/6, B=5/6, C=-7/3) = \frac{1}{6s} + \frac{5}{6}\frac{s+2}{(s+2)^2+2} - \frac{7}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2} \end{aligned}$$

Vi visade på en föreläsning att $L = \lim_{s\to 0^+} s\,H(s)$ (slutvärdesteoremet). Alltså har vi

$$L = \lim_{s\to 0^+} \frac{s(s^2+1)}{s(s^2+4s+6)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s^2+1}{s^2+4s+6} = \frac{1}{6}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.2), (L.11), (L.15) och (L.16), ger

$$h(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}e^{-2t}\cos\sqrt{2}\,t - \frac{7}{3\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}\,t, \quad t>0,$$

varav det direkt följer att $L = \lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{6}$.

(b) Vi visade på en föreläsning att $M = \lim_{s\to\infty} s\,H(s)$ (begynnelsevärdesteoremet). Alltså har vi

$$M = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+1}{s^2+4s+6} = 1.$$

Av ovanstående uttryck för $h(t)$ får vi

$$M = \lim_{t\to 0^+} h(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 0 = 1.$$

□

2. Bestäm *stegsvaret*, det vill säga lösningen då $x(t) = \Theta(t)$ = Heavisidefunktionen, till systemet

$$y'''(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 4y(t) = x(t), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Lösning. Låt $Y(s)$ vara laplacetransformen av $y(t)$. Med hjälp av (L.7) och (L.11) (tolkade på rätt sätt) får vi

$$(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s\,(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)}$$

Vi ser att $s^3 + 4s^2 + 6s + 4$ har nollstället $s = -2$, vilket ger oss faktoriseringen

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = (s+2)(s^2 + 2s + 2) = (s+2)((s+1)^2 + 1).$$

Vi kan nu partialbråksutveckla $Y(s)$ (några detaljer överhoppas):

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s\,(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C(s+1)+D}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{A(s^3+4s^2+6s+4) + B(s^3+2s^2+2s) + C(s^3+3s^2+2s) + D(s^2+2s)}{s\,(s+2)(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{(A+B+C)s^3 + (4A+2B+3C+D)s^2 + (6A+2B+2C+2D)s + 4A}{s\,(s+2)(s^2+2s+2)} \\
&= \ (A = 1/4, B = -1/4, C = 0, D = -1/2) \ = \\
&= \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1/2}{(s+1)^2+1}
\end{aligned}$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.11), (L.13), (L.16) och (L.2), ger sedan

$$y(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{e^{-t}}{2}\sin t\right)\Theta(t).$$

□

Uppgifter till lektion 9:

1. Lös vågekvationen

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 8\sin x\cos^3 x, & u_t(x,0) = 8\sin^3 x\cos x, & 0 < x < \pi \end{array}\right\}$$

Lösning. Ekvationen har homogena randvillkor och därför en unik lösning av formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,t + b_n \sin n\,t) \sin n\,x,$$

vilket ger

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\,a_n \sin n\,t + n\,b_n \cos n\,t) \sin n\,x,$$

$0 < x < \pi$, $t > 0$. Med hjälp av Eulers formler får vi

$$\begin{aligned} u(x,0) = 8\sin x\cos^3 x &= \frac{8}{(2i)(2^3)}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})^3 \\ &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})^2 = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{4ix} - e^{-4ix} + 2e^{2ix} - 2e^{-2ix}) = 2\sin 2x + \sin 4x. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{aligned} u(x,0) + u_t(x,0) &= 8\sin x\cos^3 x + 8\sin^3 x\cos x \\ &= 8\sin x\cos x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 8\sin x\cos x = 4\sin 2x \end{aligned}$$

får vi

$$u_t(x,0) = 4\sin 2x - u(x,0) = 2\sin 2x - \sin 4x.$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} 2\sin 2x + \sin 4x = u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\,x \\ &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x + \cdots \\ 2\sin 2x - \sin 4x = u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,b_n \sin n\,x \\ &= b_1 \sin x + 2b_2 \sin 2x + 3b_3 \sin 3x + 4b_4 \sin 4x + \cdots \end{aligned}$$

Vi ser att $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_n = 0$, då $n > 4$, och $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = -1/4$, $b_n = 0$, då $n > 4$. Vågekvationen har därför lösningen

$$u(x,t) = (2\cos 2t + \sin 2t)\ \sin 2x + (\cos 4t - \tfrac{1}{4}\ \sin 4t)\ \sin 4x.$$

□

2. Lös värmeledningsekvationen

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 1, & t > 0 \\ u(x,0) = 2 - x, & & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

Lösning. Om vi sätter $v(x,t) = u(x,t) - 1$ så kommer $v(x,t)$ att uppfylla ekvationen

$$\left\{\begin{array}{ccc} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ v(0,t) = 0, & v(1,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = 1 - x, & & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

I den senare ekvationen har vi homogena randvillkor så lösningen har formen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 v(x,0)\, \sin \pi n\, x\, dx = (2)\int_0^1 (1-x)\, \sin \pi n\, x\, dx \\ &= (2)\left[(1-x)\,\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=1} - (2)\int_0^1 (-1)\,\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\, dx \\ &= \frac{2}{n\pi} - 0 = \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\, e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

Den sökta lösningen är därför

$$u(x,t) = 1 + v(x,t) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}\frac{\sin \pi n\, x}{n}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0.$$

□