UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Georgios Dimitroglou Rizell
Oswald Fogelklou

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2010-10-25

Skrivtid: 8-13

Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling.

Betygsgränser: För betygen 3,4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. På varje uppgift kan man erhålla maximalt 8 poäng.

Samtliga lösningar skall vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion sådan att $f(x) = \cos(x/2)$ då $-\pi \leq x < \pi$.

(a) Bestäm funktionens fourierserie på reell form.

(b) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1/4}$.

2. Lös differensekvationen

$$a_{n+2} - a_n = 6(-1)^n,$$

för $n \in \mathbb{N}$, givet att $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$.

3. Funktionen $x(t)$ är definierad för $t \geq 0$ och uppfyller

$$x'(t) + \int_0^t 2x(t-u)e^{-2u}du = 2e^{-2t}t,$$

samt $x(0) = 2$. Bestäm $x(t)$.

4. (a) Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$ vara en funktion som uppfyller $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Bevisa formeln $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$ (dvs. formel (F.7)). (Du kan anta att $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.)

(b) Låt $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$. Beräkna $\widehat{f}(\omega)$.

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = -\pi, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$