Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Mattias Enstedt

Prov i matematik
ES & W med flera
Fouriermetoder
2007–10–17

Skrivtid: 8:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och “Formelsamling i Fourier-analys”. Varje korrekt löst uppgift (utom uppgift 6) ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.
Jag avser att komma till skrivsalen omkring klockan 10:00 för att höra om det finns frågor. Läs igenom hela texten till dess och kontrollera att du förstår alla formuleringar. Kontrollera om möjligt dina svar!

Uppgift 1 Lös *differensekvationen*

$$u(k+2) - 5u(k+1) + 6u(k) = 2k - 3$$

givet att $u(0) = 2$ och $u(1) = 6$.
Uppgift 2 Hitta en lösning till

$$y'(t) - \int_0^t y(t-u)\cos u \mathrm{d}u = t \sin t, \quad t \geq 0,$$

som uppfyller $y(0) = 0$.
Uppgift 3 Låt f vara en *jämn* 2π-periodisk funktion som ges av $f(t) = \pi - t$ då $t \in [0, \pi]$. Beräkna dess fourierserie och bestäm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Motivera tydligt.
Uppgift 4 Ange en funktionsserie, u(x,t), som löser värmeledningekvationen $u_{xx} = u_t$ och uppfyller $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ för $t > 0$ samt $u(x,0) = 1$ för $x \in [0, \pi]$.
Uppgift 5 Beräkna, för $\delta > 0$, fouriertransformen av

$$f_\delta(x) = \frac{1}{x^2 + \delta^2}.$$

Utred, med hjälp av denna transform, för vilka värden på δ det existerar lösningar i $L^1(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{(t-x)^2 + 1} \mathrm{d}t = \frac{1}{x^2 + \delta^2}.$$

Motivera tydligt.
Uppgift 6 Ange antal bonuspoäng du erhöll från inlämningsuppgiften.