UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Mattias Enstedt

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2009–10–21

Skrivtid: 8–13

Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling samt miniräknare.

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. På varje uppgift kan man erhålla maximalt 8 poäng.

Samtliga lösningarna skall vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en kontinuerligt deriverbar 2π-periodisk funktion sådan att $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Visa att

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \le \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

För vilka funktioner gäller likhet?

2. Bestäm talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ då $a_0 = 2$ och $a_1 = 4$ och

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Hitta x(t) och y(t) för $t \ge 0$ som uppfyller

$$\begin{cases} x' + 2x + y = 1, \\ y' + x + 2y = -1, \end{cases}$$

samt x(0)=4 och y(0)=-2.

4. Hitta $u \in L^1(\mathbb{R})$ sådan att

$$u(t) + \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} u(s)\mathrm{d}s = e^{-|t|}.$$

5. Hitta en funktion, $u(x, y)$, som löser

$$\begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, & 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = \sin^2 x, \quad u(x, \pi) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$