UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Georgios Dimitroglou Rizell
Oswald Fogelklou

PROV I MATEMATIK
Transformmetoder, 1MA034
2010-10-25

Skrivtid: 8-13

Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling.

Betygsgränser: För betygen 3,4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. På varje uppgift kan man erhålla maximalt 8 poäng.

Samtliga lösningar skall vara försedda med utförliga förklaringar.

---

1. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion sådan att $f(x) = \cos(x/2)$ då $-\pi \leq x < \pi$.

(a) Bestäm funktionens fourierserie på reell form.

(b) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1/4}$.

Lösning: (a) Eftersom $f(x)$ är jämn så är $b_n = 0$ för alla n.

$$a_0 = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(x/2)dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin(x/2)\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(x/2)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(x(1/2-n)) + \cos(x(1/2+n))dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(x(1/2-n))}{1/2-n} + \frac{\sin(x(1/2+n))}{1/2+n}\right]_{x=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi/2-\pi n)}{1/2-n} + \frac{\sin(\pi/2+\pi n)}{1/2+n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1/2-n} + \frac{(-1)^n}{1/2+n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi(1/4-n^2)}.$$

Vi har alltså

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1/4-n^2)}\cos nx.$$

(b) Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig och har generaliserade vänster och högerderivator överallt så ger Dirichlets sats likhet mellan funktionen och dess fourierserie, med andra ord:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1/4 - n^2)} \cos nx.$$

Genom att sätta $x = \pi$ ger detta likheten

$$0 = \cos(\pi/2) = f(\pi) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1/4 - n^2)} \cos n\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1/4 - n^2)} (-1)^n = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(1/4 - n^2)},$$

ur vilken vi kan lösa ut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4} = 2.$$

2. Lös differensekvationen

$$a_{n+2} - a_n = 6(-1)^n,$$

för $n \in \mathbb{N}$, givet att $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$.

Lösning: $\mathcal{Z}$-transformation av ekvationen, där vi betecknar $\mathcal{Z}[a_n](z) = A(z)$, ger

$$(z^2 A(z) - 3z) - A(z) = \frac{6z}{z+1} \Leftrightarrow$$

$$A(z) = \frac{6z + 3z(z+1)}{(z^2-1)(z+1)} = \frac{3z^2 + 9z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Genom partialbråksuppdelningen

$$\frac{3z+9}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z+1)^2}$$

löser vi ut $A = 3$, $B = -3$, $C = -3$. Alltså är

$$A(z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{-3z}{z+1} + \frac{-3z}{(z+1)^2}$$

vilket inverstransformeras till

$$a_n = 3 - 3(-1)^n + 3n(-1)^n.$$

3. Funktionen $x(t)$ är definierad för $t \geq 0$ och uppfyller

$$x'(t) + \int_0^t 2x(t-u)e^{-2u}du = 2e^{-2t}t,$$

samt $x(0) = 2$. Bestäm $x(t)$.

Lösning: Observera att integralen $\int_0^t 2x(t-u)e^{-2u}du = 2x(t) * e^{-2t}(t)$ är en faltning. Laplacetransformation av ekvationen, där vi betecknar $\mathcal{L}[x(t)](s) = X(s)$, ger

$$(sX(s) - 2) + 2X(s)\frac{1}{s+2} = \frac{2}{(s+2)^2} \Leftrightarrow$$

$$X(s) = \frac{2 + 2(s+2)^2}{(s+2)^2\left(s + \frac{2}{s+2}\right)} = \frac{2s^2 + 8s + 10}{(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

Andragradspolynomet i nämnaren har icke-reella rötter, så vi gör partialbråksuppdelningen

$$X(s) = \frac{2s^2 + 8s + 10}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B + Cs}{s^2+2s+2},$$

där vi löser ut $A = 1$, $B = 4$, $C = 1$. Vi har alltså

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{4+s}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{3}{(s+1)^2+1},$$

vilket inverstransformeras till

$$x(t) = e^{-2t} + e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\sin t.$$

4. (a) Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$ vara en funktion som uppfyller $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Bevisa formeln $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$ (dvs. formel (F.7)). (Du kan anta att $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.)

(b) Låt $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$. Beräkna $\widehat{f}(\omega)$.

Lösning:

(a)

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\widehat{f}(\omega).$$

(b) Låt $g(t) = \frac{-1}{2(1+t^2)}$. Eftersom $g'(t) = f(t)$ ger (F.7) och (F.12) oss

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{g'}(\omega) = i\omega\widehat{g}(\omega) = \frac{-i\omega}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \frac{-i\omega}{2}\pi e^{-|\omega|}.$$

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = -\pi, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösning: Eftersom randvillkoret är inhomogent börjar vi med att ansätta en (stationär) partikulärlösning, dvs. vi antar att vår lösning $u(x,t)$ kan skrivas som

$$u(x,t) = v(x,t) + u_p(x)$$

där $u_p(x)$ löser

$$\begin{cases} \frac{\partial u_p}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}, \\ u_p(0,t) = 0, u_p(\pi,t) = -\pi. \end{cases}$$

Eftersom $u_p(x)$ är oberoende av t får vi ODEn

$$\begin{cases} u_p''(x) = 0 \\ u_p(0) = 0, u_p(\pi) = -\pi, \end{cases}$$

vilken har lösningarna $u_p(x) = Ax+B$, där randvillkoret ger $B = 0$ samt $A = -1$. Allltså är $u_p(x) = -x$.

Om $u(x,t) = v(x,t) - x$ ska vara en lösning till ursprungliga problemet så måste $v(x,t)$ vara en lösning till det homogena problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, v(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = -u_p(x) = x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

vilket kan lösas med variabelseparation.
Om vi antar att $v(x,t) = X(x)T(t)$ så ger PDEn

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \equiv -\lambda$$

för någon konstant $\lambda \in \mathbb{R}$, eftersom V.L. är oberoende av t och $H.L$ är oberoende av x.
$X(x)$ ska alltså lösa ODEn

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(\pi) = 0, \end{cases}$$

vilket endast har triviala lösningar då $\lambda \leq 0$. För $\lambda > 0$ har vi dock lösningarna

$$X_n(x) = b_n \sin nx$$

när $\lambda = n^2$ för ett heltal $n \in \mathbb{Z}$. Då $\lambda = n^2$ löser $T(t)$ ODEn

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

och alltså är $T_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$.
Vi har alltså hittat lösningarna $v_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = b_n e^{-n^2 t} \sin nx$ till randvärdesproblemet. Superposition ger oss att även

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

löser randvärdesproblemet.
För att $v(x,t)$ skall uppfylla begynnelsevillkoret, d.v.s.

$$x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^0 \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

måste vi nu hitta sinusserien för x. Med andra ord måste vi hitta fourierkoefficienterna för funktionen x definierad för $0 \leq x < \pi$, utvidgad till en udda funktion med period 2π (helt enkelt funktionen x på intervallet $-\pi \leq x < \pi$).

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx =$$

$$\frac{-2(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Lösningen till det ursprungliga problemet är alltså

$$u(x,t) = v(x,t) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 t} \sin nx - x.$$