UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf

Svar till tentan i
TRANSFORMMETODER
2012-04-13

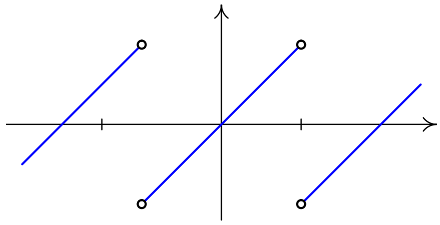
1. $y(t) = (t+1)e^t$.

2. Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{1}{2s^2 + s - 1} = \frac{1}{(s+1)(2s-1)}$$

Eftersom polen $s = \frac{1}{2}$ har positiv realdel (nämligen $\frac{1}{2}$) är systemet ostabilt. Impulssvaret (efterfrågas ej) är $h(t) = (2/3)(\exp(t/2) - \exp(-t))$.

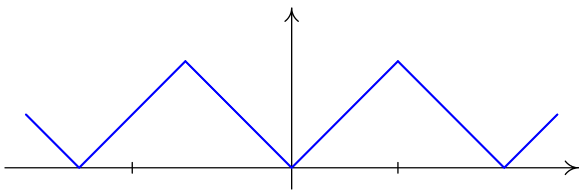
3. (a) Grafen av $g(t)$ ges av



(b) Fourierserien för $g(t)$ ges av

$$g(t) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \pi n t$$

4. (a) Grafen för $f(t)$ framgår av



(b) Av de båda graferna framgår att

$$S_f(1) = 1, \qquad S_g(1) = 0, \qquad S_f(-\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}, \qquad S_g(-\tfrac{3}{2}) = -\tfrac{1}{2}.$$

(c) Då grafen för f har hörn, men inga språng, gäller att fourierkoefficienterna för f har storleksordningen $1/n^2$. För grafen av g gäller att den har språng i de udda heltalspunkterna. Det följer att g:s fourierkoefficienter är av storleksordningen $1/n$. Fourierkoefficienterna för f går därför snabbare mot noll än fourierkoefficienterna för g.

5. (a) Överföringsfunktionen ges av

$$H(z) = \frac{1}{2z - 1}$$

Impulssvaret ges av

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Theta(n-1).$$

(b) Systempolen är $1/2$. Eftersom $|1/2| < 1$ är systemet stabilt.

6. En partialbråksuppdelning ger

$$F(s) = \frac{s^2 + 1 - 2s}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2+1}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.11) och (L.16), ger

$$f(t) = 1 - 2\sin t, \quad t \geq 0.$$

7. Faltningsformeln och (F.10), (F.12) ger

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-1,1]}(t) * \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(t-u)^2}\,du$$

Speciellt får vi

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{4}.$$

Inversionsformeln ger sedan

$$\frac{1}{4} = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

Av detta följer att

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-|\omega|}\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

8. Eftersom randvillkoren ej är homogena så ansätter vi

$$u(x,t) = h(x) + v(x,t)$$

där det ska gälla att $v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)$ och $v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t > 0$. Vi får

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t)$$

av vilket följer att $h''(x) = 0$, $h(x) = Ax + B$ och

$$0 = u(0,t) = h(0) + v(0,t) = B, \quad 1 = u(1,t) = h(1) + v(0,t) = A.$$

För $v(x,t)$ gäller $v(x,0) = u(x,0) - h(x) = -x$ och

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 v(x,0)\,\sin \pi n\, x\,dx = \int_0^1 (-2x)\,\sin \pi n\, x\,dx \\
&= \left[(-2x)\,\frac{-\cos \pi n x}{\pi n}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (-2)\,\frac{-\cos \pi n x}{\pi n}\,dx \\
&= \frac{2\cos \pi n}{\pi n} - 0 = \frac{2(-1)^n}{\pi n}
\end{aligned}$$

Alltså har vi

$$u(x,t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n}\, e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$