UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Georgios Dimitroglou, Magnus Jacobsson,
Bo Styf

Prov i matematik
TRANSFORMMETODER
2012-08-27

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogad formelsamling. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng. På varje uppgift kan man få maximalt 5 poäng.

1. Lös med hjälp av laplacetransformen differentialekvationen

$$y'(t) + 4y(t) = \sin 2t$$

där $y(0) = 0$. (5)

2. Ett linjärt system ges av differentialekvationen

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = x(t),$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen. Bestäm systemets överföringsfunktion och avgör om systemet är stabilt. (5)

3. Låt $f(t)$ vara den 2-periodiska funktion som för $-1 < t < 1$ ges av $f(t) = t^2$.

(a) Beräkna den reella fourierserien för $f(t)$.

(b) Beräkna den komplexa fourierserien för $f(t)$. (5)

4. *Denna uppgift kan lösas utan beräkning av några fourierkoefficienter!* Låt $f(t)$ vara som i uppgift 3 ovan. Låt $g(t)$ vara den *udda* 2-periodiska funktion som för $0 < t < 1$ ges av $g(t) = t^2$.

(a) Skissa grafen av $g(t)$ på intervallet $-2 < t < 2$.

(b) Mot vilka värden konvergerar de båda fourierserierna (för $f(t)$ respektive $g(t)$) i punkterna $t = -1/2$ och $t = 2$?

(c) För vilken av de två funktionerna går fourierkoefficienterna snabbast mot noll då $n \to \infty$? (Med andra ord: Vilken av fourierserierna konvergerar bäst?) (5)

5. Ett linjärt system ges av differensekvationen

$$2y(n+2) - y(n+1) = x(n),$$

där $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar.

(b) Avgör om systemet är stabilt.

(5)

6. Bestäm funktionen $f(t),\ t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}$$

Skissa även f:s graf. (5)

7. Hitta den funktion $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vars fouriertransform är given av

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2(1 - \cos(2a\omega))}{\omega^2},$$

samt räkna ut integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(1 - \cos(2a\omega))^2}{\omega^4} d\omega.$$

(5)

8. Lös värmeledningsekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 1, & & 0 < x < 1 \end{array} \right\}$$

(5)