UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf

Svar till tentan i
TRANSFORMMETODER
2012-08-27

1.

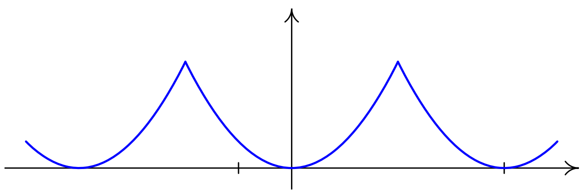
$$Y(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{s+4} - \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{10}\frac{2}{s^2+4}$$
$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$$

2. Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+4} = \frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

Eftersom båda polerna $s = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ har negativ realdel (nämligen $-\frac{3}{2}$) så är systemet stabilt.

3. Grafen för $f(t)$ framgår av



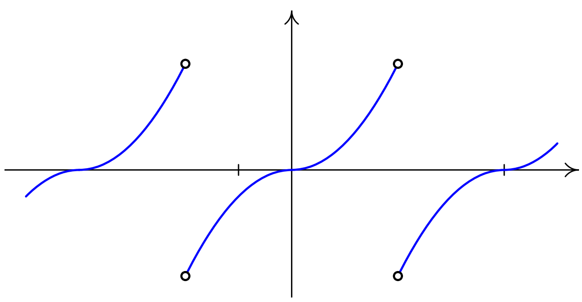
(a)

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \quad b_n = 0.$$
$$f(t) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n t$$

(b)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}, \quad c_n = \frac{2(-1)^{|n|}}{\pi^2 n^2}, \; n \neq 0.$$
$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n t}$$

4. (a) Grafen av $g(t)$ ges av



(b)

$$S_f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}, \quad S_g(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}, \quad S_f(2) = S_g(2) = 0.$$

(c) Då grafen för f har hörn, men inga språng, gäller att fourierkoefficienterna för f har storleksordningen $1/n^2$. För grafen av g gäller att den har språng i de udda heltalspunkterna. Det följer att g:s fourierkoefficienter är av storleksordningen $1/n$. Fourierkoefficienterna för f går därför snabbare mot noll än fourierkoefficienterna för g.

5. (a) Överföringsfunktionen ges av

$$H(z) = \frac{1}{z(2z-1)} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z}$$

Impulssvaret ges av

$$h(n) = \Theta(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \delta(n-1).$$

(b) Systempolerna är 0 och $1/2$. Eftersom båda har absolutbelopp mindre än 1 är systemet stabilt.

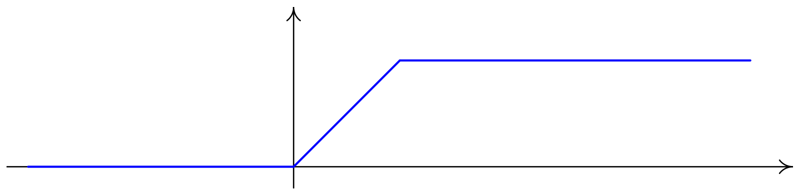
6. Vi har

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{2}{s^2}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.4) och (L.12), ger

$$f(t) = t\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1)$$

Grafen för f framgår av



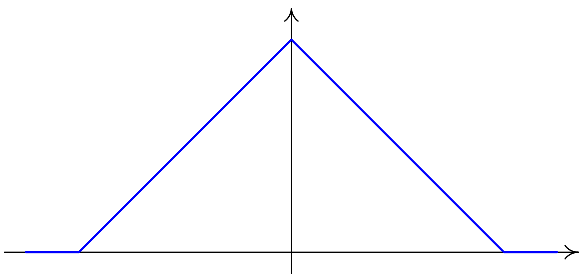
7. Ur formelsamlingen fås den trigonometriska formeln $1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$. Alltså har vi

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{(2)(2)\sin^2 a\omega}{\omega^2} = \left(\frac{2\sin a\omega}{\omega}\right)^2$$

Faltningsformeln och (F.10) ger

$$f(t) = \chi_{[-a,a]}(t) * \chi_{[-a,a]}(t) = \int_{-a}^{a} \chi_{[-a,a]}(u-t)\,du = \max(2a - |t|, 0).$$

Grafen för f framgår av



Plancherels formel ger sedan

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(1-\cos(2a\omega))^2}{\omega^4} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 4\pi \int_0^{2a} (2a-t)^2 dt = \frac{32\pi a^3}{3}.$$

8. Eftersom randvillkoren ej är homogena så ansätter vi

$$u(x,t) = h(x) + v(x,t)$$

där det ska gälla att $v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)$ och $v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t > 0$. Vi får

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t)$$

av vilket följer att $h''(x) = 0$, $h(x) = Ax + B$ och

$$1 = u(0,t) = h(0) + v(0,t) = B, \quad 0 = u(1,t) = h(1) + v(1,t) = A + B, \quad h(x) = 1 - x.$$

För $v(x,t)$ gäller $v(x,0) = u(x,0) - h(x) = 1 - (1-x) = x$ och

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 v(x,0) \sin \pi n\, x\, dx = \int_0^1 (x) \sin \pi n\, x\, dx$$
$$= \left[(x) \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (1) \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} dx$$
$$= \frac{-\cos \pi n}{\pi n} - 0 = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}$$

Alltså har vi

$$u(x,t) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$