UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Magnus Jacobsson, Bo Styf

Prov i matematik
TRANSFORMMETODER
2012-12-20

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogad formelsamling. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng. På varje uppgift kan man få maximalt 5 poäng.

1. Ett kausalt LTI-system ges av differentialekvationen

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x(t)$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar.

(b) Avgör om systemet är stabilt. (5)

2. Funktionen $f(t)$ är udda och 2-periodisk och ges för $0 < t < 1$ av $f(t) = (t-1)^2$.

(a) Beräkna den reella fourierserien för f.

(b) Beräkna den komplexa fourierserien för f. (5)

3. I denna uppgift behöver inga fourierkoefficienter beräknas. Låt $f(t)$ vara som i uppgift 2 ovan. Låt $g(t)$ vara den funktion som sammanfaller med $f(t)$ för $0 < t < 1$ men är *jämn* och 2-periodisk.

(a) Skissa graferna till $f(t)$ och $g(t)$.

(b) Vilken av de båda fourierserierna (för f respektive g) konvergerar snabbast?

(c) För vilka punkter $t \in \mathbb{R}$ konvergerar g:s fourierserie? Mot vilka värden konvergerar den? (5)

4. Beräkna faltningen $(f * g)(t)$ om $f(t) = \Theta(t)\cos t$ och $g(t) = \Theta(t)e^t$. (5)

5. Ett LTI-system ges av differensekvationen

$$4y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = x(n),$$

där $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar.

(b) Avgör om systemet är stabilt. (5)

6. Bestäm funktionen $f(t),\ t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s}$$

Skissa även f:s graf. (5)

7. Bestäm funktionen $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, vars fouriertransform ges av

$$F(\omega) = \frac{-2i\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

samt räkna ut integralen

$$\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(1+\omega^2)^4}. \qquad (5)$$

8. Lös följande randvärdesproblem för värmeledningsekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = -1, & u(1,t) = 1, & t > 0 \\ u(x,0) = 2x, & & 0 < x < 1 \end{array} \right\} \qquad (5)$$