1. Ett kausalt LTI-system ges av differentialekvationen

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x(t)$$

där $x(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar.

(b) Avgör om systemet är stabilt.

Svar. (a) Laplacetransformation ger

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = X(s).$$

Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right)$$

Med (L.13) fås impulssvaret

$$h(t) = \frac{1}{3}\,\Theta(t)\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)$$

(b) Systempolerna, $s = -1$ och $s = -4$, har båda negativ realdel. Alltså är systemet stabilt.

□

2. Funktionen $f(t)$ är udda och 2-periodisk och ges för $0 < t < 1$ av $f(t) = (t-1)^2$.

(a) Beräkna den reella fourierserien för f.

(b) Beräkna den komplexa fourierserien för f.

Svar. (a) Eftersom $f(t)$ är udda gäller $a_n = 0$, $n \geq 0$ och

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 (t-1)^2 \, \sin \pi n t \, dt \\
&= \left[2(t-1)^2 \, \frac{-\cos \pi n t}{\pi n}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 4(t-1)\,\frac{-\cos \pi n t}{\pi n}\, dt \\
&= \frac{2}{\pi n} - \left[4(t-1)\,\frac{-\sin \pi n t}{\pi^2 n^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 4\,\frac{-\sin \pi n t}{\pi^2 n^2}\, dt \\
&= \frac{2}{\pi n} - 0 + \left[4\,\frac{\cos \pi n t}{\pi^3 n^3}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{2}{\pi n} - \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi^3 n^3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Den reella fourierserien för f ges därför av

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n t$$

(b) Om vi sätter

$$c_0 = 0,\ c_n = \frac{-i}{\pi n} + \frac{2i(1-(-1)^n)}{\pi^3 n^3},\ n > 0 \quad \text{och} \quad c_n = \bar{c}_{-n},\ n < 0,$$

så ges den komplexa fourierserien för f av

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n t}$$

□

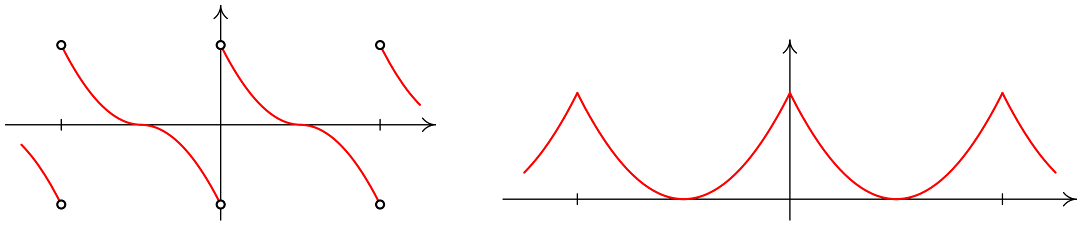
3. I denna uppgift behöver inga fourierkoefficienter beräknas. Låt $f(t)$ vara som i uppgift 2 ovan. Låt $g(t)$ vara den funktion som sammanfaller med $f(t)$ för $0 < t < 1$ men är *jämn* och 2-periodisk.

(a) Skissa graferna till $f(t)$ och $g(t)$.

(b) Vilken av de båda fourierserierna (för f respektive g) konvergerar snabbast?

(c) För vilka punkter $t \in \mathbb{R}$ konvergerar g:s fourierserie? Mot vilka värden konvergerar den?

Svar. (a) Graferna till $f(t)$ respektive $g(t)$ framgår av



(b) Vi ser att f:s fourierkoefficienter är av storleksordningen $1/n$. Då grafen för g har hörn, men inga språng, gäller att fourierkoefficienterna för g har storleksordningen $1/n^2$. Fourierserien för g konvergerar därför snabbast.

(c) Eftersom g är kontinuerlig, med vänster- och högerderivata överallt, så konvergerar g:s fourierserie mot $g(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

□

4. Beräkna faltningen $(f * g)(t)$ om $f(t) = \Theta(t)\cos t$ och $g(t) = \Theta(t)\, e^t$.

Svar. Funktionernas laplacetransformer ges av

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{respektive} \quad G(s) = \frac{1}{s-1}$$

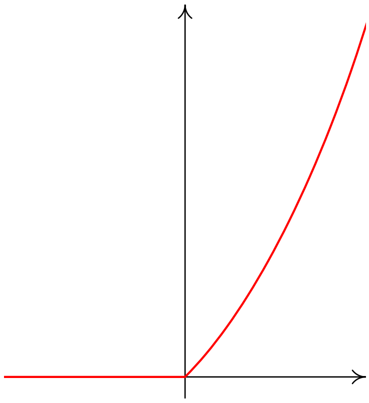
Laplacetransformen av $(f * g)(t)$ är därför

$$F(s)G(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

Med hjälp av (L.13), (L.14), (L.15) får vi

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}\,\Theta(t)\,\left(e^t + \sin t - \cos t\right)$$

Grafen av $(f * g)(t)$ framgår av



Observera att $(f * g)(t)$ är kontinuerlig överallt trots att både $f(t)$ och $g(t)$ har språngdiskontinuiteter då $t = 0$. □

5. Ett LTI-system ges av differensekvationen

$$4y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = x(n),$$

där $x(n)$ är insignalen och $y(n)$ är utsignalen.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar.

(b) Avgör om systemet är stabilt.

Svar. (a) Z-transformation av differensekvationen ger

$$(4z^2 - 4z + 1)Y(z) = X(z)$$

Överföringsfunktionen ges därför av

$$H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{4z^2 - 4z + 1} = \frac{1}{(2z-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}\,\frac{\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

Genom att inverstransformera $H(z)$, med hjälp av (Z.11) och (Z.3), får vi impulssvaret

$$h(n) = \frac{1}{2}(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Theta(n-1) = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\Theta(n-1).$$

(b) Systemet har dubbelpolen $z = 1/2$. Eftersom $|1/2| < 1$ är systemet stabilt.

□

6. Bestäm funktionen $f(t),\ t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s}$$

Skissa även f:s graf.

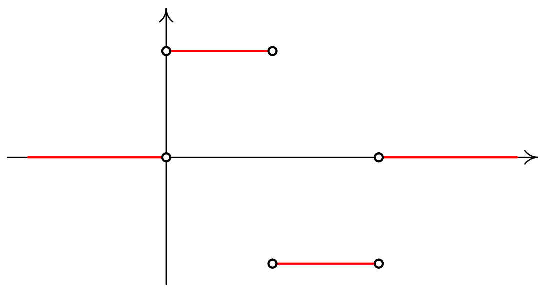
Svar. Vi har

$$F(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} = \frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s}.$$

Inverstransformering, med hjälp av (L.4) och (L.11), ger

$$f(t) = \Theta(t) - 2\Theta(t-1) + \Theta(t-2)$$

Det betyder att $f(t) = 0$, för $t < 0$, $f(t) = 1$, för $0 < t < 1$, $f(t) = -1$, för $1 < t < 2$ och $f(t) = 0$, för $2 < t$. Grafen av f framgår av



$\square$

7. Bestäm funktionen $f(t),\ -\infty < t < \infty$, vars fouriertransform ges av

$$F(\omega) = \frac{-2i\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

samt räkna ut integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(1+\omega^2)^4}.$$

Svar. Enligt (F.11) gäller att

$$g(t) = e^{-|t|} \quad \sim \quad G(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Av (F.6) följer att

$$t\,g(t) = t\,e^{-|t|} \quad \sim \quad iG'(\omega) = \frac{i(2)(-2\omega)}{(1+\omega^2)^2} = 2\,F(\omega)$$

Alltså har vi

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\,t\,g(t) = \tfrac{1}{2}\,t\,e^{-|t|}$$

Enligt Plancherel gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Eftersom

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 8I$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{4} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{2!}{16} = \frac{1}{8}$$

får vi

$$8I = \frac{2\pi}{8} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{32}.$$

□

8. Lös följande randvärdesproblem för värmeledningsekvationen

$$\begin{Bmatrix} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = -1, & u(1,t) = 1, & t > 0 \\ u(x,0) = 2x, & & 0 < x < 1 \end{Bmatrix}$$

Svar. Eftersom randvillkoren ej är homogena så ansätter vi

$$u(x,t) = h(x) + v(x,t)$$

där det ska gälla att $v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)$ och $v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t > 0$. Vi får

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) = h''(x) + v_{xx}(x,t)$$

av vilket följer att $h''(x) = 0$, $h(x) = Ax + B$ och

$$-1 = u(0,t) = h(0) + v(0,t) = B, \quad 1 = u(1,t) = h(1) + v(1,t) = A + B, \quad h(x) = 2x - 1.$$

För $v(x,t)$ gäller $v(x,0) = u(x,0) - h(x) = 2x - (2x-1) = 1$ och

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n\, x$$

där

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 v(x,0)\, \sin \pi n\, x\, dx = \int_0^1 (2)\, \sin \pi n\, x\, dx \\ &= \left[\frac{-2\cos \pi n x}{\pi n}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$u(x,t) = 2x - 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin \pi(2k+1)\, x$$

□