UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Tanja Bergkvist

Flervariabelanalys (1MA017) ES, IT, W
Datum: 2010-10-25

Lösningar:

1. Närmar vi oss punkten $(0,0)$ längs linjen $x = y$ får vi

$$f(x,x) = \frac{x^2 + 3x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

men om vi närmar oss $(0,0)$ längs linjen $y = 0$ får vi $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$. Således existerar inte gränsvärdet.

2. Riktningen ges av $(0,4,-1) - (-1,2,1) = (1,2,-2)$, och normerar vi denna (så att längden blir 1) får vi $\overline{v} = \frac{1}{3}(1,2,-2)$. Riktningsderivatan ges av $f'_{\overline{v}} = \nabla f \cdot \overline{v}$ där gradienten i detta fall blir

$$\nabla f(x,y,z) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) = \left(\frac{2xz}{2-z^2}, \frac{2yz}{2-z^2}, \frac{(x^2+y^2)}{2-z^2} + \frac{2z^2(x^2+y^2)}{(2-z^2)^2}\right)$$

så att $\nabla f(-1,2,1) = (-2,4,15) \Rightarrow f'_{\overline{v}}(-1,2,1) = (-2,4,15) \cdot \frac{1}{3}(1,2,-2) = -8$.

3. Tangentplanet ges av $z = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(y-1)$ och i detta fall är de partiella derivatorna lika med $f_x(x,y) = 2x$ och $f_y(x,y) = 4y$ så tangentplanets ekvation blir $z = 4x + 4y - 6$. Alternativt kan $z = f(x,y)$ skrivas $F(x,y,z) = 0$ där $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Tangentplanet till nivåytan i $(2,1,6)$ är vinkelrät mot $\nabla F(2,1,6) = (4,4,1)$ så planets ekvation ges av $4x + 4y - z + C = 0$ och insättning av punkten $(2,1,6)$ ger oss $C = -6$, varför tangentplanets ekvation blir $4x + 4y - z - 6 = 0$.

4. Stationära/kritiska punkter uppfyller ekvationerna $f_x(x,y) = \frac{4y^2-4x^2+6x+4}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$ och $f_y(x,y) = \frac{-2y(4x-3)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$, där den andra ekvationen ger $y = 0$ eller $x = 3/4$. Om $y = 0$ ger den första ekvationen oss punkterna $(2,0)$ och $(-\frac{1}{2},0)$ där $(2,0)$ förkastas eftersom den inte ligger i det beaktade området $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi har $f(-\frac{1}{2},0) = -4$. Då $x = 3/4$ har vi $f(\frac{3}{4},y) = 0$ (täljaren i funktionen blir noll). För att undersöka randen parametriserar vi den och får $f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = (4\cos t - 3)/2 = \phi(t)$. För att erhålla max och min här kan vi derivera $\phi(t)$ och sätta derivatan lika med noll och få ut punkterna $t = 0$ och $t = \pi$, vilket ger $f(\cos 0, \sin 0) = f(1,0) = 1/2$ och $f(\cos\pi, \sin\pi) = f(-1,0) = -7/2$, annars är detta uppenbart eftersom $\cos t \in [-1,1]$. Således får vi att den givna funktionens minsta värde är -4 och dess största värde är $1/2$.

5. Punkten $(1, 2)$ är en stationär punkt till $f(x, y) = x + y + \frac{4}{xy^2}$ då $f_x(x, y) = 1 - 4/(x^2y^2)$ och $f_y(x, y) = 1 - 8/(xy^3)$ båda är noll i $(1, 2)$. Vi beräknar andraderivatorna:

$$f_{xx} = \frac{8}{x^3y^2} \quad f_{xy} = \frac{8}{x^2y^3} \quad f_{yy} = \frac{24}{xy^4}$$

varför $f_{xx}(1, 2) = 2, f_{xy}(1, 2) = 1, f_{yy}(1, 2) = 3/2$ så den kvadratiska formen i $(1, 2)$ blir

$$Q(h, k) = f_{xx}(1, 2)h^2 + 2f_{xy}(1, 2)hk + f_{yy}(1, 2)k^2 = 2h^2 + 2hk + \frac{3}{2}k^2 = 2(h^2 + hk + \frac{3}{4}k^2)$$

$$= 2\left((h + \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{3k^2}{4}\right) = 2\left((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{1}{2}k^2\right) > 0 \quad \forall(h, k) \neq (0, 0)$$

så den kvadratiska formen är positivt definit vilket innebär att $(1, 2)$ är ett lokalt minimum. Alternativt fås ur andraderivatorna Hessianerna $H_1 = 2 > 0$ och $H_2 = 2 > 0$ vilket innebär att $(1, 2)$ är ett lokalt minimum.

6. Kvadratkomplettering ger $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ och med substitutionen $x = 1 + r\cos t, y = r\sin t$ där $t \in [0, 2\pi]$ och $r \in [0, 1]$ får vi

$$\int\int_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ((1 + r\cos t)^2 + (r\sin t)^2)rdrdt =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} (r + r^3 + 2r^2\cos t)dtdr = \int_0^1 [tr + tr^3 + 2r^2\sin t]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 (2\pi r + 2\pi r^3)dr =$$

$$2\pi\left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 3\pi/2.$$

7. Med Greens formel får vi

$$\int_\gamma (2xy - x^2 + y^2\sin(xy^2))dx + (x + y^2 + 2xy\sin(xy^2))dy = \int\int_D (1 - 2x)dxdy$$

där D är området som begränsas av $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$ (notera att kurvornas skärningspunkter är $(0, 0)$ och $(1, 1)$) och vi beräknar denna integral (först med avseende på y och därefter med avseende på x):

$$\int\int_D (1 - 2x)dxdy = \int_0^1\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (1 - 2x)dydx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)dx =$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3)dx = 1/30.$$

8. Vi sätter $f(x,y) = x^3y + 2y^3x \Rightarrow f_y(x,y) = x^3 + 6y^2x \Rightarrow f_y(2,1) = 20 \neq 0$ så enligt implicita funktionssatsen kommer ekvationen $f(x,y) = 12$ att definiera y som en funktion av x i närheten av punkten $(2,1)$. Implicit derivering med avseende på x av sambandet $x^3y + 2y^3x = 12$ (där $y = y(x)$) ger nu:

$$3x^2 \cdot y(x) + x^3 \cdot y'(x) + 6y^2(x) \cdot y'(x) \cdot x + 2y^3(x) \cdot 1 = 0$$

så insättning av $x = 2$ och $y(2) = 1$ i detta uttryck ger nu $20 \cdot y'(2) = -14 \Rightarrow y'(2) = -14/20 = -7/10$.