Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

EN EKVATION OCH EN OBEKANT

$$a \cdot x = b$$

Talet x är en reell variabel, som vi kortfattat skriver $x \in \mathbf{R}$. Talen a och b är reella konstanter. Vi önskar bestämma x så att x blir en lösning till ekvationen $a \cdot x = b$.

EXEMPEL 1 Ekvationen $2x = 3$ har precis en lösning $x = \dfrac{3}{2}$.

EXEMPEL 2 Ekvationen $2x = 0$ har precis en lösning $x = 0$.

EXEMPEL 3 Ekvationen $0 \cdot x = 3$ har inga lösningar alls. Vänstra ledet (VL) blir 0 för alla x och vi kan aldrig få likhet i ekvationen.

EXEMPEL 4 Ekvationen $0 \cdot x = 0$ har oändligt många lösningar. För alla $x \in \mathbf{R}$ blir VL lika med 0 som är lika med HL.

Från exemplen kan vi inse att ekvationen $a \cdot x = b$ har precis en lösning $x = b/a$ om $a \neq 0$.
Ekvationen har inga lösningar om $a = 0,\ b \neq 0$.
Ekvationen löses av alla reella tal x om $a = 0,\ b = 0$.

ÖVNING 1 a) För vilka värden på a har ekvationen $(a-1)x = 1$ precis en lösning, inga lösningar, oändligt många lösningar?

b) För vilka värden på b har ekvationen $3x = b - 1$ precis en lösning, inga lösningar, oändligt antal lösningar?

Vänster led i ekvationen $a \cdot x = b$ kan betraktas som en funktion $y = a \cdot x$. Funktionen avbildar varje $x \in \mathbf{R}$ på $a \cdot x \in \mathbf{R}$. Speciellt avbildar funktionen talet $\dfrac{b}{a}$ på talet b om $a \neq 0$.

Om $a = 0$ avbildar funktionen varje x på talet 0.

Klicka på Figur 1

TVÅ EKVATIONER OCH EN OBEKANT

$$\begin{cases} a_1 \cdot x &= b_1 \\ a_2 \cdot x &= b_2 \end{cases}$$

Om både a_1 och a_2 är $\neq 0$ har ekvationssystemet en lösning om och endast om lösningarna till **båda** ekvationerna är lika, dvs om och endast om

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

som också är den enda lösningen till systemet.

Om t ex $a_1 = 0$ och $b_1 \neq 0$ har den första ekvationen ingen lösning och då har heller inte systemet någon lösning. Det spelar då ingen roll om den andra ekvationen har lösning eller inte.

Gauss eliminationsmetod Vi ska nu lösa ekvationssystemet med en metod som är uppkallad efter Gauss. Vi antar att $a_1 \neq 0$ så vi kan dividera den första ekvationen med a_1. Vi får då

$$\begin{cases} x &= \dfrac{b_1}{a_1} \\ a_2 \cdot x &= b_2 \end{cases}$$

Sedan multiplicerar vi den första ekvationen med $-a_2$ och vi får

$$\begin{cases} -a_2 \cdot x &= -\dfrac{b_1}{a_1} a_2 \\ a_2 \cdot x &= b_2 \end{cases}$$

Adderar vi den första ekvationen till den andra får vi

$$\begin{cases} -a_2 \cdot x &= -\dfrac{b_1}{a_1} a_2 \\ 0 \cdot x &= b_2 - \dfrac{b_1}{a_1} a_2 \end{cases}$$

Multiplicerar vi slutligen den sista ekvationen med a_1 och dividerar den första med $-a_2$ får vi slutligen ett ekvationssystem som har precis samma lösningar som det ursprungliga men som är mycket enklare att analysera.

$$\begin{cases} x &= \dfrac{b_1}{a_1} \\ 0 \cdot x &= b_2 a_1 - b_1 a_2 \end{cases}$$

Den andra ekvationen har inga lösningar om $b_2 a_1 - b_1 a_2 \neq 0$. Då har inte heller systemet som sådant några lösningar. Om $b_2 a_1 - b_1 a_2 = 0$ har den andra ekvationen oändligt många lösningar. Systemets lösningar blir dock lösningen till den första ekvationen $x = \dfrac{b_1}{a_1}$ som ju också är en av de oändligt många lösningarna till den andra ekvationen.

ÖVNING 2 Lös följande ekvationssystem med Gauss elimination.

a) $\begin{cases} x &= 2 \\ 3 \cdot x &= 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x &= 3 \\ 3 \cdot x &= 8 \end{cases}$

När vi löser ekvationssystem upptäcker vi snart att vi inte behöver skriva ut variabeln x i varje beräkningssteg. Det finns ett praktiskt sätt att organisera en Gauss elimination som vi illustrerar i Figur 2.

Vänster led i ekvationen

$$\begin{cases} a_1 \cdot x &= b_1 \\ a_2 \cdot x &= b_2 \end{cases}$$

kan betraktas som en funktion

$$\begin{cases} y_1 &= a_1 \cdot x \\ y_2 &= a_2 \cdot x \end{cases}$$

Funktionen avbildar varje $x \in \mathbf{R}$ in i planet $\mathbf{R^2}$ så att bildpunkterna bildar en rät linje genom origo då minst ett av talen a_1 och a_2 är $\neq 0$. Om båda konstanterna a_1 och a_2 är 0 blir bilden bara origo. Högerledet kan betraktas som en punkt $\mathbf{b}$ i planet med koordinaterna (b_1, b_2). Vi skriver i fortsättningen koordinaterna på formen

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Om då t ex punkten $\mathbf{b}$ inte ligger på linjen saknar ekvationssystemet lösningar. Om punkten ligger på linjen har ekvationssystemet en lösning. En enkel illustration finns i Figur 3.

ÖVNING 3 Illustrera den räta linje i planet som svarar mot vänsterledet i ekvationssystemet

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x &= 2 \end{cases}$$

Markera också punkten som svarar mot högerledet i samma plan, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Denna punkt ligger inte på linjen och ekvationssystemet saknar alltså lösning.

EN EKVATION OCH TVÅ OBEKANTA

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

EXEMPEL 1   Betrakta ekvationen $x_1 - x_2 = 0$. Om vi låter t ex x_2 anta värdet 1 så måste $x_1 = 1$. Om $x_2 = 0$ så måste $x_1 = 0$. Generellt om x_2 antar det godtyckliga värdet t så måste $x_1 = t$. Ekvationssystemet har alltså oändligt många lösningar $x_1 = t$, $x_2 = t$. Variabeln x_2 kallas **fri variabel.**

EXEMPEL 2   Ekvationen $0 \cdot x_1 + x_2 = 1$ som oftast skrives $x_2 = 1$ har lösningarna $x_1 = t$, $x_2 = 1$. Variabeln x_1 kan vara vilket tal som helst i ekvationen eftersom $0 \cdot t = 0$ för alla t. Här är x_1 fri variabel.

Allmänt om båda konstanterna a_1 och a_2 är $\neq 0$ kan vi lösa systemet $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ genom att välja $x_2 = t$ som fri variabel och få $x_1 = \dfrac{b - a_2\,t}{a_1}$.

Om t ex $a_1 = 0$ väljer vi $x_1 = t$ som fri variabel och vi får alltså lösningarna $x_1 = t,\ x_2 = \dfrac{b}{a_2}$.

ÖVNING 4   Lös följande ekvationssystem

a) $x_1 - 3x_2 = 2$ b) $x_1 = 3$ (variablerna är x_1 och x_2)

Vänsterledet i ekvationssystemet $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ kan man betrakta som en funktion $y = a_1x_1 + a_2x_2$ från planet till de reella talen. De punkter i planet som avbildas på talet b bildar en rät linje med ekvationen $x_1 = \dfrac{b - a_2\,t}{a_1}, x_2 = t$ om $a_1 \neq 0$.
Figur 4.

TVÅ EKVATIONER OCH TVÅ OBEKANTA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

EXEMPEL 1 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 7 \end{cases}$$

löser vi med Gauss elimination. Multiplicera första ekvationen temporärt med -2 och addera den till den andra ekvationen. Då får vi

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 & = & 2 \\ & 3x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Ekvationssystemet är nu på **trappstegsform.** Dividera den andra ekvationen med 3.

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 & = & 2 \\ & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Multiplicera nu den andra ekvationen temporärt med -1 och addera den till den första. Då får vi systemet

$$\begin{cases} x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Ekvationssystemet är nu på **radkanonisk form.** Vi ser att vi har precis en lösning $x_1 = 1, x_2 = 1$.

Vi kan också lösa systemet utan att skriva ut variablerna Figur 5.

EXEMPEL 2 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + 9x_2 & = & 12 \end{cases}$$

löser vi med Gauss elimination. Multiplicera första ekvationen temporärt med -3 och addera den till den andra ekvationen. Då får vi

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen har nu försvunnit och vi har bara en ekvation kvar. Den har t ex lösningarna $x_1 = 4 - 3t, x_2 = t$ som också är ekvationssystemets lösningar. Lösningarna är alltså oändligt många i detta exempel.

EXEMPEL 3 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + 9x_2 & = & 13 \end{cases}$$

löser vi med Gauss elimination. Multiplicera första ekvationen temporärt med -3 och addera den till den andra ekvationen. Då får vi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Den andra ekvationen kräver nu att $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ men detta är omöjligt. Vänster led blir alltid noll vilka variabler vi än försöker välja. Höger led är däremot 1. Den andra ekvationen saknar alltså lösningar och då saknar även ekvationssystemet lösningar.

Det finns en geometrisk förklaring till de tre helt olika lösningarna i exemplen. Varje ekvation i ekvationssystemen representerar en rät linje i planet. Lösningarna till ekvationssystemet svarar mot de gemensamma punkterna på linjerna.

I Exemepel 1 skär linjerna varandra i en punkt och vi får precis en lösning.

I Exempel 2 är linjerna sammanfallande och vi får de lösningar som svarar mot linjen.

I Exempel 3 är linjerna parallella och åtskilda och vi har då inga gemensamma punkter och inga lösningar.

ÖVNING 5 Lös ekvationssystemen med Gauss elimination.

a)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ 2x_1 + 9x_2 & = & 10 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ 2x_1 + 8x_2 & = & 6 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 3 \\ 2x_1 + 8x_2 & = & 10 \end{cases}$$

EN EKVATION OCH TRE OBEKANTA

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

EXEMPEL 1 I ekvationen $x_1+2x_2+3x_3 = 1$ låter vi x_2 och x_3 vara fria variabler. Vi sätter $x_2 = s$, $x_3 = t$ där s och t är godtyckliga reella tal. Ekvationens lösningar är alltså $x_1 = 1 - 2s - 3t, x_2 = s, x_3 = t$.

EXEMPEL 2 I ekvationen $2x_2 + 3x_3 = 1$ förekommer inte x_1. Den är alltså fri och vi kan sätta $x_1 = s$. Därefter väljer vi $x_3 = t$ som fri variabel och systemets lösningar blir alltså $x_1 = s, x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, x_3 = t$.

ÖVNING 6 Lös ekvationssystemet $x_1 - 3x_3 = 5$.

Vänsterledet i ekvationen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ kan uppfattas som en funktion $y = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ från rummet in i de reella talen. Lösningarna till ekvationen kan då uppfattas som plan i rummet med ekvationen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ eller uttryckt som lösningarna med fria variabler.
Figur 6.

TVÅ EKVATIONER OCH TRE OBEKANTA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \end{cases}$$

EXEMPEL 1

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Multiplicera första ekvationen temporärt med -2 och addera den till den andra ekvationen. Då får vi

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & = & 1 \\ & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Multiplicera andra ekvationen med -1.

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & = & 1 \\ & x_2 + & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Vi önskar nu eliminera den term i första ekvationen som står ovanför den första termen i andra ekvationen. Multiplicera därför den andra ekvationen med -2 och addera till den första.

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ & x_2 + & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet är nu på radkanonisk form. Vi ser att det är lämpligt att välja x_3 som fri variabel och sätta $x_3 = t$. Då blir lösningarna till ekvationssystemet $x_1 = 1 + t, x_2 = -2t, x_3 = t$.

Den geometriska bilden av ekvationssystemet är att varje ekvation representerar ett plan i rummet. Dessa plan skär varandra i detta exempel längs en rät linje.

ÖVNING 7 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + & 4x_2 + & 6x_3 & = & 3 \end{cases}$$

TRE EKVATIONER OCH TRE OBEKANTA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

ÖVNING 8 Försök lösa ekvationssystemet med Gauss elimination.

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2 + & 7x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 + & -5x_3 & = & 2 \\ -2x_1 + & 5x_2 + & -9x_3 & = & 3 \end{cases}$$