Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

KOMPLEXA TAL

VERSION 1.1

MULTIPLIKATION AV VEKTORER

Så här långt har vi adderat vektorer och multiplicerat dem med reella tal. Är det också möjligt att multiplicera vektorer så att produkten blir en vektor i samma vektorrum? Låt oss undersöka detta i $\mathbf{R^1}$ och $\mathbf{R^2}$.

$\mathbf{R^1}$ Låt x och y vara reella tal. Definiera produkten av vektorerna $[x]$ och $[y]$ som vektorn $[xy]$. Denna produkt

$$[x][y] = [xy],$$

har samma egenskaper som produkten av reella tal.
Bland dessa egenskaper kan vi nämna

1. $[x][y] = [y][x]$ (kommutativ egenskap)
2. $[x]([y_1] + [y_2]) = [x][y_1] + [x][y_2]$ (distributiv egenskap)
3. $[x][1/x] = [1]\,, x \neq 0$ (existens av multiplikativ invers)

En mängd med dessa egenskaper kallas *talkropp.* Vi erhåller väsentligen ingenting extra genom att göra vektorrummet $\mathbf{R^1}$ till en talkropp. $\mathbf{R^1}$ får samma egenskaper som de reella talen.

$\mathbf{R^2}$ Låt

$$z_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad z_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

vara två vektorer i $\mathbf{R^2}$. Av historiska skäl och enligt praxis betecknar vi dessa vektorer med z_1 och z_2 utan fetstil.
Låt vinkeln mellan vektorerna och positiva $x-$axeln vara θ_1 respektive θ_2. Vi inför också längden $|z|$ av respektive vektor som

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{samt} \quad |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

DEFINITION Produkten $z_1\,z_2$ av vektorerna z_1 och z_2 ovan definieras som den vektor som bildar vinkeln

$$\theta_1 + \theta_2$$

med $x-$axeln och som har längden

$$|z_1\,z_2| = |z_1||z_2|.$$

Klicka på Figur 1

Denna produkt svarar mot de fundamentala geometriska operationerna rotation och förlängning (förkortning) av vektorer i planet.

EXEMPEL 1 Geometriskt kan vi bestämma att

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eftersom vinkeln mellan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och x-axeln är 90° och längden av vektorn är 1. Då blir produkten en vektor som bildar vinkeln $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ med $x-$axeln och som också har längden 1. Detta är vektorn

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figur 2

ÖVNING 1 Låt

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$z^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

genom att först rita z i en figur och sedan beräkna och summera vinklar.

Både i EXEMPEL 1 och ÖVNING 1 har vi funnit att

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^2$$

är lika med

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

EXEMPEL 2 Låt w vara en godtycklig nollskild vektor i $\mathbf{R^2}$. Säg att den bildar vinkeln 2θ med $x-$axeln och har längden $|w|$. Det finns då alltid två vektorer z_1 och z_2 sådana att ${z_k}^2 = w$, $k = 1, 2$. Om vi nämligen låter z_1 bilda vinkeln θ och z_2 vinkeln $\theta + 180°$ med $x-$axeln samt väljer $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|w|}$ så blir $z_1^2 = z_2^2 = w$.

Figur 3

ÖVNING 2 Låt

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm de två vektorer z_1 och z_2 för vilka gäller $z_1^2 = z_2^2 = w$.

Från EXEMPEL 2 kan vi göra en fundamental observation. Den nya produkten som vi definierat i $\mathbf{R^2}$ har alltså egenskapen: givet en godtycklig nollskild vektor w så finns det alltid någon vektor z sådan att $z^2 = w$. Denna egenskap har inte de reella talen! För talet -1 t ex finns inget tal x sådant att $x^2 = -1$.

EXEMPEL 3 Låt oss kontrollera om produkten har multiplikativ invers. Vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

fungerar som "etta" i produkten eftersom den har vinkeln $0°$ med $x-$axeln och längden 1.

Låt w vara en godtycklig nollskild vektor i $\mathbf{R^2}$. Säg att den bildar vinkeln θ med $x-$axeln och har längden $|w|$. Låter vi z bilda vinkeln $360° - \theta$ med $x-$axeln samt väljer $|z| = \dfrac{1}{|w|}$ så blir

$$zw = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figur 4

EXEMPEL 4 Vi har enligt EXEMPEL 3 multiplikativ invers. Den kommutativa egenskapen är uppenbar eftersom addition av vinklar och multiplikation av längder är kommutativ. Man kan också visa att produkten har den distributiva egenskapen,

$$z(z_1 + z_2) = z\,z_1 + z\,z_2.$$

I fallet med $|z| = 1$ framgår detta av den geometriska konstruktionen i figur 5. Den går att verifiera med elementär euklidisk geometri.

Figur 5

Med hjälp av den distributiva lagen kan vi nu räkna ut koordinaterna för produkten

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Vi skriver de två faktorerna som en linjär kombination av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och utnyttjar särskilt multiplikativa ”ettan” samt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom distributiva egenskapen betyder att man multiplicerar ihop parenteserna som vanligt får vi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (ac - bd) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (bc + ad) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{bmatrix}.$$

ÖVNING 3 Låt

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$z^2 = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 \\ 2ab \end{bmatrix}$$

med hjälp av formeln för multiplikation.

Här kommer en något svårare övning.

ÖVNING 4 Låt

$$w = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vara en given vektor. Visa genom att använda resultatet i ÖVNING 3 att det finns precis två vektorer z sådana att $z^2 = w$.

Ledning: Ansätt

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

där x och y är reella tal och bestäm dessa så att $z^2 = w$.

ÖVNING 5 Låt

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Visa med en geometrisk motivering att det finns tre vektorer z sådana att $z^3 = w$.

Ledning: Om vinkeln mellan z och x-axeln är θ så är vinkeln mellan z^3 och $x-$axeln lika med 3θ. Uppgiften består i att finna de vinklar θ för vilka 3θ är en heltalsmultipel av $360°$, inklusive $0°$.

ÖVNING 6 Låt

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$z^3 = \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 \\ 3a^2b - b^3 \end{bmatrix}$$

med hjälp av formeln för multiplikation.

ÖVNING 7 Låt

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Visa genom att använda resultatet i ÖVNING 6 att det finns precis tre vektorer z sådana att $z^3 = w$.

Ledning: Ansätt

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

där x och y är reella tal och bestäm dessa så att $z^3 = w$.

BEGRUNDAN AV EKVATIONERNA $x^2 = -1$ OCH $z^2 = -1$

Ekvationen $x^2 = -1$ där x är ett rellt tal har inga lösningar. De reella talen har egenskapen att $x^2 > 0$ för alla $x \neq 0$. Däremot har vi funnit att ekvationen $z^2 = -1$ har två lösningar

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Detta under förutsättning att vi betraktar z som en vektor i $\mathbf{R^2}$ och även högerledet -1 som en vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

samt att vi har försett $\mathbf{R^2}$ med den ovan definierade multiplikationen av vektorer. (EXEMPEL 1 och ÖVNING 1)

Det är viktigt att notera att dessa ekvationer är fundamentalt olika som matematiska objekt. Funktionen $f(x) = x^2$ avbildar ett reellt tal x på den reella tallinjen på det likaså reella talet x^2 på den icke-negativa delen av reella tallinjen. Därför är det enkelt att hitta tal på tallinjen som inte kan nås av x^2, nämligen varje negativt tal.

Funktionen $f(z) = z^2$ däremot avbildar varje vektor z i planet på en en vektor z^2 med längden $|z|^2$ där dessutom z^2 bildar en dubbelt så stor vinkel med $x-$axeln som z. När vi har avbildat varje z som har vinklar mellan 0 och 180° inklusive gränserna, så har vi därför med z^2 täckt hela planet. Det är orsaken till att vi alltid kan hitta lösningar som uppfyller ekvationen $z^2 = w$ för alla högerled w (ÖVNING 4).

Figur 6

Man kan fundera över ekvationerna $x^3 = 1$ och $z^3 = 1$ på samma sätt. Den första ekvationen har bara lösningen $x = 1$ om vi söker reella lösningar.
Den andra ekvationen har ett vänsterled z^3 som täcker planet med bildvektorer. Vi har i ÖVNING 7 visat att det finns **tre** vektorer i planet som avbildas på vektorn

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

av z^3. Också här är x^3 och z^3 funktioner av fundamentalt olika typ.

KOMPLEXA TALPLANET $\mathbf{C}$ MED MERA

Vektorrummet $\mathbf{R^2}$, med den multiplikation av vektorer som vi studerat i detta avsnitt, kallas **komplexa talplanet** och betecknas $\mathbf{C}$.
I stället för att skriva vektorerna som kolonner

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

kan man skriva $z = a + bi$ där symbolen i har egenskapen att $i^2 = -1$. Produkten av två komplexa tal $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$ blir då med kommutativa och distributiva lagarna

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i\,.$$

Detta uttryck stämmer överens med vårt sätt att introducera komplexa tal. Jag föredrar att framhäva de komplexa talen som vektorer för att man ska se geometrin av de komplexa talen tydligare.

Avslutningsvis kan man fundera över om det går att införa multiplikation av vektorer också i högre dimensioner. Svaret är att algebror, där varje nollskilt element har en multiplikativ invers, bara går att införa i $\mathbf{R^1}$, $\mathbf{R^2}$, $\mathbf{R^4}$ och $\mathbf{R^8}$. Mer information kan man finna t ex om man googlar på ”quaternions” för fallet $\mathbf{R^4}$ och ”Cayley numbers” för $\mathbf{R^8}$.