Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

KOMPLEXA TAL

ÖVNINGAR

SVAR OCH ANVISNINGAR

VERSION 1.1

1.
$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bildar vinkeln $180° + 90°$ med x-axeln. z^2 bildar därför vinkeln

$$(180° + 90°) + (180° + 90°) = (360° + 180°)$$

med x-axeln. Då dessutom längden av z^2 är 1 måste denna vektor vara

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi observerar att en eller flera rotationer med $360°$ påverkar inte läget av vektorn.

Figur 1

2.
$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bildar vinkeln $90°$ med $x-$axeln. Om vi då väljer z_1 och z_2 med längden 1 och vinkeln $45°$ respektive $45° + 180°$ blir både z_1^2 och z_2^2 lika med w. Om vi vill ange koordinaterna för respektive vektor blir dessa

$$z_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{resp} \quad z_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Figur 2

3. Formeln ger
$$z^2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 \\ 2ab \end{bmatrix}.$$

4. Vi låter
$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Då blir

Låt
$$z^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$
som skall vara lika med
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$
Vi får därför ekvationssystemet
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = a \\ 2xy & = b \end{cases}.$$
Om vi t ex löser ut $y = \dfrac{b}{2x}$ och sätter in detta i den första ekvationen får vi
$$x^4 - a\,x^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$
Detta är en andragradsekvation i x^2 och vi får enligt formeln för andragradsekvationens lösningar
$$x^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$
Minustecknet ger ett högerled som är mindra än noll och alltså inga lösningar. Plustecknet ger positivt högerled och vi får precis två lösningar för det reella talet x. Insättning i $2xy = b$ av vardera $x-$värdet ger y och vi får slutligen de två lösningarna för x, y.

5. En figur säger här mer än ord. Koordinaterna för z_1 och z_2 är här bestämda i figuren med hjälp av 30, 60, 90 graders trianglar.

Figur 3

6. Vi låter
$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Då blir
$$z^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

och

$$z^3 = z^2\,z = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - xy^2 - 2xy^2 \\ 2x^2y + x^2y - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix}.$$

7. Genom att använda resultatet i ÖVNING 6 får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = 1 \\ 3x^2y - y^3 & = 0 \end{cases} .$$

Den andra ekvationen ger $3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0$. Detta ger $y = 0$ eller $3x^2 = y^2$. Om vi sätter in $y = 0$ i den första ekvationen får vi $x^3 = 1$. Här är x ett reellt tal och den enda reella lösningen till $x^3 = 1$ är $x = 1$. (En motivering för detta är att x^3 som funktion av en reell variabel är strikt växande och därför bara kan anta värdet 1 en enda gång).

Vi har alltså funnit en lösning

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sätter vi nu in $y^2 = 3x^2$ i den första ekvationen får vi $x^3 - 3x \cdot 3x^2 = 1$ som vi kan förenkla till

$$x^3 = -\frac{1}{8}.$$

Denna ekvation har den enda lösningen $x = -\frac{1}{2}$. Sätter vi in detta i $y^2 = 3x^2$ får vi $y^2 = \frac{3}{4}$ med lösningarna $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Därmed har vi också funnit de båda lösningarna z_1 och z_2 i ÖVNING 5.