Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

MATRISER MED MERA

VEKTORRUM

DEFINITION Ett vektorrum V är en mängd av symboler $\mathbf{u}$ som vi kan addera samt multiplicera med reella tal c så att samma räkneregler gäller som för de reella talen $\mathbf{R}$. Symbolerna kallas då **vektorer.** Det ska speciellt finnas en vektor $\mathbf{0}$ med egenskapen att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$. Denna vektor kallas **nollvektorn**. Vi har också räkneregeln att $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$. Vektorn $(-1)\mathbf{u}$ skriver vi $-\mathbf{u}$. Slutligen kan vi nämna att talet 0 gånger $\mathbf{u}$ alltid blir $\mathbf{0}$, dvs nollvektorn.

EXEMPEL 1 De reella talen $\mathbf{R}$ kan vi göra till ett vektorrum $V=\mathbf{R}^1$. Vi inför symbolerna $\mathbf{u}=[\,x\,]$ där x är ett reellt tal. Vi definierar addition av symbolerna som

$$[\,x\,]+[\,y\,]=[\,x+y\,]$$

och multiplikation med ett reellt tal c som

$$c\,[\,x\,]=[\,cx\,].$$

Nollvektorn blir då $[\,0\,]$ och $[\,x\,]+(-1)[\,y\,]=[\,x\,]+[\,-y\,]=[\,x-y\,]$. Symbolen $[\,x\,]$ är det enklaste exemplet på en **matris,** en så kallad $1\times 1-$matris. Den har en rad och en kolonn.

ÖVNING 1 Beräkna a) $[\,2\,]+[\,4\,]$ b) $[\,2\,]-[\,4\,]$ c) $[\,2\,]-[\,2\,]$

EXEMPEL 2 Punkterna i planet kan vi också göra till ett vektorrum $V=\mathbf{R}^2$. Om vi har ett koordinatsystem i planet har varje punkt två koordinater (x_1,x_2). När vi gör planet till ett vektorrum med vektorerna $\mathbf{u}$ inför vi symbolerna

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Också denna symbol är exempel på en matris, en så kallad $2\times 1-$matris. Den har 2 rader och 1 kolonn. Vi definierar addition av symbolerna som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$$

och multiplikation med ett reellt tal c som

$$c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \end{bmatrix}.$$

Då blir t ex nollvektorn

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ÖVNING 2 Beräkna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

EXEMPEL 3 Punkterna i rummet kan vi också göra till ett vektorrum $V = \mathbf{R}^3$. Om vi har ett koordinatsystem i rummet har varje punkt tre koordinater (x_1, x_2, x_3). När vi gör rummet till ett vektorrum med vektorerna $\mathbf{u}$ inför vi symbolerna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Också denna symbol är exempel på en matris, en så kallad $3 \times 1-$matris. Den har 3 rader och 1 kolonn. Vi definierar addition av symbolerna som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

och multiplikation med ett reellt tal c som

$$c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \\ c\,x_3 \end{bmatrix}.$$

Då blir t ex nollvektorn

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ÖVNING 3 Beräkna

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometrisk tolkning i vektorrummen $\mathbf{R^1}$, $\mathbf{R^2}$ och $\mathbf{R^3}$

$\mathbf{R^1}$ Två vektorer $[\,x\,]$ och $[\,y\,]$ representeras av två sträckor med startpunkt i origo 0 och ändpunkterna i x respektive y på tallinjen $\mathbf{R}$. Summan blir då en sträcka med ändpunkten i $x+y$. Om c är ett reellt tal blir $c[\,x\,] = [\,c\,x\,]$ en sträcka med ändpunkten i $c\,x$. Sträckan $[\,cx\,]$ byter riktning jämfört med $[\,x\,]$ om c är ett negativt tal.

Klicka på Figur 1

$\mathbf{R^2}$ Två vektorer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

representeras av två sträckor med startpunkt i origo $(0,0)$ och ändpunkterna i punkten (x_1,x_2) respektive (y_1,y_2) i planet $\mathbf{R^2}$. Summan blir då en sträcka med ändpunkten i (x_1+y_1, x_2+y_2) som bestämmes med en parallellogram. Om c är ett reellt tal blir

$$c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \end{bmatrix}$$

en sträcka med ändpunkten i $(c\,x_1, c\,x_2)$. Sträckan byter riktning om c är ett negativt tal.

Figur 2

$\mathbf{R^3}$ Två vektorer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

representeras av två sträckor med startpunkt i origo $(0,0,0)$ och ändpunkterna i punkten (x_1,x_2,x_3) respektive (y_1,y_2,y_3) i rummet $\mathbf{R^3}$. Summan blir då en sträcka med ändpunkten i $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ som bestämmes med en parallellepiped. Vi avstår från att försöka illustrera med en tre-dimensionell figur.

Om c är ett reellt tal blir

$$c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \\ c\,x_3 \end{bmatrix}$$

en sträcka med ändpunkten i $(c\,x_1, c\,x_2, x_3)$. Sträckan byter riktning om c är ett negativt tal.

ÖVNING 4 Beräkna

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

och avgör om vektorn ligger över eller under $xy-$planet om vi har infört koordinatsystemet (x, y, z) i rummet.

Linjära kombinationer, baser

För att enkelt kunna illustrera våra begrepp låter vi vektorerna tillhöra $\mathbf{R^2}$. Låt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

vara två vektorer i $\mathbf{R^2}$. Om c_1 och c_2 är reella tal så kallar vi uttrycket

$$c_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

en **linjär kombination** av vektorerna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

EXEMPEL 4 Varje vektor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i $\mathbf{R^2}$ kan vi skriva så här:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs som en linjär kombination av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har använt räknereglerna för vektorer i $\mathbf{R^2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en så kallad **bas** för $\mathbf{R^2}$. Denna enkla bas kallas för **standardbasen** i $\mathbf{R^2}$.

Figur 3 Standardbasen i $\mathbf{R^2}$

ÖVNING 5 Visa steg för steg med räknereglerna för vektorrum att

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ÖVNING 6 Försök lista ut vilken standardbasen är i $\mathbf{R^1}$ samt i $\mathbf{R^3}$.

Ekvationssystem, vektorrum och matriser

Vi ska nu införa det viktiga hjälpmedlet **matris** med hjälp av vad vi lärt oss om ekvationssystem och vektorrum. Betrakta ekvationssystemet i EXEMPEL 1 i avsnittet om ekvationssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 7 \end{cases}$$

Vänsterledet består av två tal, nämligen talet $x_1 + x_2$ samt $2x_1 + 5x_2$. Dessa två tal kan vi använda för att bilda en vektor i $\mathbf{R^2}$, nämligen

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

som vi kan skriva som linjärkombinationen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

ÖVNING 7 Verifiera detta.

Högerledet består också av två tal, 2 och 7, som vi kan använda för att bilda vektorn

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbf{R^2}$.

Ekvationssystemet betyder att linjärkombinationen i vänster led är lika med vektorn i höger led, dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Att lösa ekvationssystemet handlar alltså om att lösa ett geometriskt problem: Finns det tal x_1 och x_2 så att en linjär kombination

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

av vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

kan bli vektorn

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}?$$

När vi löste ekvationssystemet fann vi att den enda lösningen var $x_1 = x_2 = 1$, dvs den linjära kombinationen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{är lika med} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Betrakta det allmänna ekvationssystemet med två variabler och två obekanta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

Enligt diskussionen ovan kan vi skriva detta ekvationssystem på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

dvs vänstra ledet är en linjär kombination av två vektorer, representerade av kolonnmatriserna

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vi inför nu följande skrivsätt

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kallas en **matris** och

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

är en vektor i $\mathbf{R^2}$. I detta fall har matrisen 2 rader och 2 kolonner. Den är då av typen 2×2.

På motsvarande sätt kan vi skriva t ex ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \end{cases}$$

på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Matrisen A är här en matris med 2 rader och 3 kolonner, som kallas en matris av typ 2×3 .

ÖVNING 8 Skriv följande ekvationssystem på formen $A\mathbf{x}$. Ange matrisen A, dess typ samt vektorn $\mathbf{x}$.

a)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

b)

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2+ & 7x_3 & = & 1 \\ & 3x_2+ & -5x_3 & = & 2 \\ -2x_1+ & 5x_2+ & -9x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Determinanter

Det finns ett utomordentligt vackert sätt att geometrisk beskriva när ett så kallat kvadratiskt ekvationssystem har precis en lösning , oändligt många lösningar eller inga lösningar alls. I ett kvadratiskt ekvationssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har matrisen A samma antal rader som kolonner, dvs den är av typ $n \times n$. Ett annat sätt att karakterisera ett kvadratiskt ekvationssystem är att antalet ekvationer är lika med antalet obekanta.

Vi illustrerar metoden i fallet med kvadratiska ekvationssystem där matrisen A är av typ 2×2.

EXEMPEL 5 Ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & = & a \\ -x_1 & +x_2 & = & b \end{array} \right.$$

kan efter första delen av Gauss elimination skrivas

$$\left\{ \begin{array}{rrcc} x_1 & +x_2 & = & a \\ & +2x_2 & = & a+b \end{array} \right.$$

och det framgår att systemet har precis en lösning för alla högerled. Ekvationssystemet kan också geometriskt beskrivas som

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

och problemet handlar om huruvida de två vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kan multipliceras med lämpliga tal och sedan adderas med parallellogramlagen så att summan blir vektorn

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Intuitivt verkar detta vara möjligt om vektorerna ”pekar åt olika håll” i planet.

EXEMPEL 6 Ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & = & a \\ 2x_1 & +2x_2 & = & b \end{array} \right.$$

kan efter första delen av Gauss elimination skrivas

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & = & a \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & = & b-2a \end{array}\right.$$

och det framgår att systemet har oändligt många lösningar om $b - 2a = 0$ men ingen lösning alls om $b - 2a \neq 0$.
Ekvationssystemet kan också geometriskt beskrivas som

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

och vänsterledet är tydligen en rät linje som går genom origo och t ex punkten $(1, 2)$.
Då får vi ingen lösning om

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ligger utanför linjen men oändligt många lösningar då vektorn ligger på linjen.

Det är tydligen viktigt att undersöka när två vektorer "pekar åt olika håll". Betrakta vektorerna

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

i planet. Man kan säga att de pekar åt olika håll när parallellogrammen som bestäms av vektorerna har en area som inte är noll. Man kan visa att arean är $ad - bc$ där tecknet på arean beror på i vilken ordning vektorerna tas upp i parallellogrammen. Detta uttryck kallas **determinanten av matrisen** A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

och betecknas $\det A$. Vi har alltså formeln

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Av diskussionen ovan kan vi dra slutsatsen att ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{cccc} ax_1 & +bx_2 & = & h \\ cx_1 & +dx_2 & = & k \end{array}\right.$$

har precis en lösning om och endast om determinanten $ad - bc$ av systemets matris är $\neq 0$.
Beviset för parallellogrammens area är synnerligen intressant men vi tar inte upp detta här och nu. Den algebraiska delen av beviset bygger på att determinanten av

en matris inte beror på om vi gör radoperationer på denna, dvs t ex utför en Gauss elimination (radbyte ändrar dock tecken på determinanten). Vi kan t o m på samma sätt utföra kolonnoperationer.

ÖVNING 9 a) Vad är

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}?$$

Vad är arean av den parallellogram som spänns av kolonnerna i matrisen?

Figur 4

b) Med hjälp av resultatet i a) kan man direkt avgöra vilka lösningarna är till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Vad kan det vara för resonemang som ligger bakom detta påstående?

Matrisinvers

När ett kvadratiskt ekvationssystem har precis en lösning har systemets matris A en så kallad **invers matris** A^{-1}. Vi illustrerar detta i ett exempel.

EXEMPEL 7 Betrakta ett ekvationssystem med två variabler och två obekanta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & y_2 \end{cases}$$

där vi antar att systemet har precis en lösning, dvs att determinanten av systemets matris är nollskild.

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Om vi löser systemet, t ex med Gauss eliminationsmetod, får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\left(y_1\begin{bmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Matrisen

$$\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

är den inversa matrisen A^{-1} till matrisen A. Vi kan alltså lösa systemet genom att beräkna den inversa matrisen då $\det A \neq 0$.

ÖVNING 10 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 & = & 4 \end{cases}$$

genom att först beräkna systemets inversa matris.

Matrismultiplikation

Vi ska bara antyda hur multiplikation av matriser uppstår på ett naturligt sätt.

EXEMPEL 8 Betrakta ekvationssystemen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & y_2 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

samt ekvationssystemet

$$b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \quad = \quad z \ ,$$

dvs

$$y_1[\, b_{11}\,] + y_2[\, b_{12}\,] = [\, z\,].$$

Det första systemet har alltså matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

och det andra systemet matrisen

$$B = [\, b_{11}\ b_{12}\,].$$

Med hjälp av de båda ekvationssystemen kan vi uttrycka z med hjälp av x_1 och x_2 och erhålla ett ekvationssystem med de obekanta x_1 och x_2 samt högerledet lika med z. Genom substitution får vi

$$z = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) =$$

$$= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 =$$

$$= x_1[\, b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\,] + x_2[\, b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\,] =$$

$$= [\, b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \qquad b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= C\mathbf{x}.$$

Genom att sätta samman två ekvationssystem får vi ett nytt ekvationssystem med matrisen C. Denna matris är **matrisprodukten** BA, dvs

$$BA = [\, b_{11} \;\; b_{12}\,] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= [\, b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \qquad b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\,].$$

Matrisen B är av typen 1×2 och matrisen A av typen 2×2. Produkten BA blir av typen 1×2. Det uttryck för produkten som vi härlett i detta exempel kallas **rad-kolonn regeln** för matrismultiplikation.

ÖVNING 11 Beräkna matrisprodukten

$$BA = [\, 2 \quad 3\,] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

EXEMPEL 9 Produkten av två $2 \times 2-$matriser definieras enligt rad-kolonn regeln på följande sätt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

ÖVNING 12 a) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna AA^{-1} samt $A^{-1}A$.

b) Låt

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna BC samt CB.