Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

MATRISER

ÖVNINGAR

SVAR OCH ANVISNINGAR

VERSION 1.1

1. a) $[\,2\,]+[\,4\,]=[\,2+4\,]=[\,6\,]$ b) $[\,2\,]-[\,4\,]=[\,2\,]+(-1)[\,4\,]=[\,2\,]+[\,-4\,]=[\,2-4\,]=[\,-2\,]$
c) Från beräkningen i b) framgår att vi kan direkt skriva $[\,2\,]-[\,2\,]=[\,2-2\,]=[\,0\,]$.

2.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-9 \\ 2+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

3.
$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 \\ 4+9 \\ -4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

4.
$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 \\ 4+9 \\ -6-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ändpunkten har alltså $z-$koordinaten -18 och vektorn ligger därmed under $xy-$planet.

5.
$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

6. I $\mathbf{R}^1$ kan varje vektor $[\,x\,]$ skrivas som $x\,[\,1\,]$ och här är alltså $[\,1\,]$ standardbasen.
I $\mathbf{R}^3$ kan varje vektor skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och här är alltså

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

standardbasen.

7.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

8. a)

$$x_1[\,1\,] + x_2[\,2\,] + x_3[\,3\,] = [\,1\,]$$

dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\,1\,].$$

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

har en rad och tre kolonner och är av typ 1×3.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

har tre rader och tre kolonner, dvs den är av typen 3×3.

9. a)

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.$$

Om vi vill räkna arean positiv är alltså arean av parallellogrammen lika med 2.

b) Ett kvadratiskt ekvationssystem har precis en lösning då determinanten av systemets matris är skild från 0. Vårt system har alltså nollskild determinant och har alltså precis en lösning. Denna måste då vara $x_1 = x_2 = 0$ som man omedelbart ser är en lösning (den triviala lösningen) till systemet

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

10.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = 1.$$

Ekvationssystemet har alltså precis en lösning. Enligt formeln för matrisinversen för en $2 \times 2-$matris får vi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

och lösningen blir

$$1 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs $x_1 = 5, x_2 = 2$ är lösningen till ekvationssystemet.

11.

$$BA = [\,2 \quad 3\,] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= [\,2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \qquad 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7\,] = [\,26 \quad 31\,].$$

12. a) Rad-kolonn regeln ger

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alla matrisinverser A^{-1} har denna egenskap.

b)

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs $BC \neq CB$.

Övning b) visar att matrismultiplikation i allmänhet inte är kommutativ.