Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

# RÄTA LINJER, PLAN, SKALÄRPRODUKT, ORTOGONALITET MM

## VERSION 1.1

## MER OM EKVATIONSSYSTEM

Linjära ekvationssystem och den geometri man kan härleda ur dessa är ett av naturvetenskapens viktigaste områden. Ämnesområdet heter **Linjär algebra** och det är en obligatorisk kurs i varje teknisk-naturvetenskaplig utbildning.
Vi betraktar därför åter ett ekvationssystem, t ex

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \end{cases}$$

Detta kan enligt föregående avsnitt om vektorrum skrivas på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Vänsterledet är alltså en linjär kombination av tre kolonner, där varje kolonn är en vektor i $\mathbf{R^2}$. Alla dessa linjära kombinationer kallas **kolonnrummet**. Högerledet är också en vektor i $\mathbf{R^2}$ och ekvationssystemet handlar om att bestämma den linjära kombination av kolonnvektorerna som ger vektorn i högerledet. Detta är ett i grunden geometriskt problem.

EXEMPEL 1 I ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & b \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

är kolonnrummet alla linjära kombinationer av kolonnen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dessa kombinationer bildar en rät linje i $\mathbf{R^2}$ genom origo och vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet har då lösning om högerledet

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

är en vektor på linjen, men ingen lösning om högerledet ligger utanför linjen.

*ÖVNING 1* Avgör, t ex med Gauss elimination, huruvida följande ekvationssystem har lösning eller inte.

a)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Illustrera kolonnrummet och markera den vektor som svarar mot respektive högerled.

Nu ska vi studera alla möjliga *lösningar* till ett ekvationssystem. Vi betraktar åter ekvationssystemet ovan men nu med högerledet lika med noll. Ett sådant ekvationssystem kallas ett **homogent** ekvationssystem.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ett homogent ekvationssystem har alltid lösning, t ex finns alltid lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, den så kallade **triviala lösningen**. Lösningarna till systemet ges av variablerna (de obekanta) $x_1, x_2, x_3$ som kan betraktas som vektorer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R^3}.$$

Alla lösningarna till ett homogent ekvationssystem bildar en mängd vektorer som kallas **nollrummet**.

EXEMPEL 2 Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med Gauss elimination första delen. Då får vi som i övning 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{cases}$$

Vi väljer $x_2 = s, x_3 = t$ som fria variabler och erhåller lösningarna

$$x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = t.$$

På vektorform blir lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + +t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den sista likheten erhålles med räknereglerna för vektorrum (kontrollera gärna att det stämmer genom att räkna från höger till vänster). Lösningarna, dvs nollrummet, är alltså alla linjära kombinationer av vektorerna

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa kombinatiner bildar ett plan i rummet $\mathbf{R^3}$ genom origo och de två vektorerna (punkterna)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*ÖVNING 2* Lös följande ekvationssystem med Gauss elimination

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Försök tolka lösningarna geometriskt.

I nästa exempel ska vi studera ett ekvationssystem som har ett större kolonnrum än i EXEMPEL 1.

EXEMPEL 3 I ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 = & a \\ & & x_2 & + & 2x_3 = & b \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

är kolonnrummet alla linjära kombinationer av kolonnerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dessa kombinationer ger alla vektorer i $\mathbf{R^2}$, dvs kolonnrummet är i detta fall lika med hela $\mathbf{R^2}$. Därför har ekvationssystemet lösning för alla högerled

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Lösningarna blir i detta ekvationssystem en rät linje i rummet $\mathbf{R^3}$.

*ÖVNING 3* Lös ekvationssystemet med Gauss elimination

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beskriv lösningarna på vektorform i $\mathbf{R^3}$.

## Några observationer

*OBSERVATION 1* I EXEMPEL 1 och 2 är kolonnrummet en linje och lösningarna bildar ett plan. I EXEMPEL 3 är kolonnrummet ett plan och lösningarna bildar en linje. Det verkar som att ”summan av dimensionerna” är konstant lika med tre i dessa exempel. Detta är ett specialfall av en allmän sats. Utan att exakt definiera begreppet dimension tillåter vi oss att formulera

*DIMENSIONSSATSEN* Kolonnrummets dimension plus lösningsrummets dimension är lika med antalet obekanta.

Det kan vara av intresse att kontrollera sanningshalten i denna sats varje gång man löser ett ekvationssystem.

*OBSERVATION 2* Kolonnrummet i EXEMPEL 3 är alla linjära kombinationer av tre olika kolonner. Redan de två första ”pekar åt olika håll” och linjärkombinationerna av dessa ger hela $\mathbf{R^2}$. Den tredje kolonnen ger inget extra utrymme. Kolonner (vektorer) i planet som pekar åt olika håll, dvs är icke-parallella, benämnes **linjärt oberoende**. Den tredje kolonnen (vektorn) sägs vara **linjärt beroende** av de två första.

*ÖVNING 4* Lös ekvationssystemet med Gauss elimination

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## RÄTA LINJER OCH PLAN

Eftersom kolonnrummet och lösningsrummet (nollrummet) till ett ekvationssystem kan vara en rät linje bör vi studera den räta linjen mer i detalj. För att begränsa framställningen nöjer vi oss med att studera linjer i planet. Linjer i rummet kan studeras med samma metodik.

### RÄT LINJE I PLANET

En rät linje i planet $\mathbf{R}^2$ genom punkten $(x_0, y_0)$, parallell med vektorn

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

beskrivs av ekvationerna

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

eller på vektorform

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Talet $t$ genomlöper alla reella tal och kallas **parameter**. Vektorn

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

kallas **riktningsvektor**. En rät linje är entydigt bestämd om vi vet att den går genom två olika fixa punkter $(x_1, y_1)$ och $(x_2, y_2)$. Vi kan bestämma linjens ekvationer genom att låta t ex

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

vara en riktningsvektor och som punkten $(x_0, y_0)$ välja $(x_1, y_1)$ eller $(x_2, y_2)$.

Klicka på Figur 1

*ÖVNING 5* Bestäm ekvationerna på vektorform för den räta linje i planet som går genom punkterna $(2,1)$ och $(1,2)$. Avgör sedan om punkten $(5,-2)$ ligger på linjen eller inte.

Vi ska nu studera generellt när en punkt $(x,y)$ i planet ligger på linjen genom $(x_0,y_0)$ och som är parallell med vektorn

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Villkoret är att det finns ett tal $t$ så att

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

som vi också kan skriva

$$t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}.$$

Detta är ett ekvationssystem med en obekant $t$ och två ekvationer. Observera att här är inte bara $(x_0,y_0)$ en fix punkt i planet utan också $(x,y)$. Vi löser ekvationssystemet med Gauss elimination. Vi studerar här endast fallet då $a \neq 0$. Multiplicera den andra ekvationen med $a$ och den första ekvationen temporärt med $-b$ och addera den första ekvationen till den andra. Då får vi systemet

$$t \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ -bx + ay - (bx_0 + ay_0) \end{bmatrix}.$$

Den andra ekvationen $0 \cdot t = -bx + ay - (bx_0 + ay_0)$ har lösningar om och endast om $-bx + ay - (bx_0 + ay_0) = 0$. Detta är ett nödvändigt villkor för att $(x,y)$ ska kunna ligga på linjen. Den första ekvationen har alltid lösningen

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

så det fullständiga villkoret för att en punkt $(x,y)$ ligger på linjen är alltså

$$-bx + ay - (bx_0 + ay_0) = 0 \quad \text{eller} \quad bx - ay + (bx_0 + ay_0) = 0.$$

Detta är linjens ekvation på **parameterfri form**.

EXEMPEL 4   Linjen genom punkten $(2, 1)$ och riktningsvektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

har ekvationen $-x - y + C = 0$ på parameterfri form. Vi betecknar den konstanta termen $bx_0 + ay_0$ med $C$. Konstanten $C$ bestäms ur villkoret att punkten $(2, 1)$ ligger på linjen. Detta ger $-2 - 1 + C = 0$ dvs $C = 3$ och linjens ekvation blir $-x - y + 3 = 0$ eller $x + y - 3 = 0$.

*ÖVNING 6*   Bestäm den räta linjen $x - 2y = 1$ på parameterform.

## PLAN I RUMMET

Ett plan i rummet $\mathbf{R^3}$ genom punkten $(x_0, y_0, z_0)$, parallell med vektorerna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

beskrivs av ekvationerna

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot s \\ y = y_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot s \\ z = z_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot s \end{cases}$$

eller på vektorform

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Talet $t$ och $s$ genomlöper alla reella tal och kallas **parametrar**. Vektorerna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

kallas **riktningsvektorer**.

På samma sätt som för räta linjen i $\mathbf{R^2}$ kan man bestämma villkoret för att en punkt $(x, y, z)$ ska ligga i ett plan givet på parameterform. Villkoret blir av typen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

där $A$, $B$, $C$, $D$ är konstanter.

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

it ÖVNING 7 Ge ekvationen för planet nedan på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ genom att betrakta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

som ett ekvationssystem i $t$ och $s$ och bestämma villkoren på $x, y, z$ för att ekvationssystemet ska ha lösningar.

*ÖVNING 8* Ge ekvationen på parameterform för planet $x - 2y + 3z = 0$.

## SKALÄRPRODUKT, AVSTÅND OCH ORTOGONALITET

Ett viktigt problem i matematiken och naturvetenskapen är att beräkna avståndet från en punkt till en rät linje eller ett plan i rummet. **Avståndet är den kortaste sträckan från punkten till linjen eller planet**.

Från den klassiska geometrin känner vi till att den kortaste sträckan från en punkt till en linje eller ett plan är **normalen** från punkten till linjen eller planet. En linje är normal till en linje eller plan om den är **ortogonal** (vinkelrät) mot linjen eller planet.

Vi nöjer oss i detta avsnitt med att betrakta avståndsproblemet i $\mathbf{R^2}$.

Vi ska först härleda ett viktigt villkor för att två vektorer $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ i $\mathbf{R^2}$ ska vara ortogonala.

Vi behöver då uttrycket för längden $||\mathbf{u}||$, $||\mathbf{v}||$, $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$ av $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ respektive $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.

Den klassiska Pythagoras sats ger

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad , \; ||\mathbf{v}|| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad , \; ||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)}^2 .$$

Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ bildar hörn i en triangel.

Figur 2

Enligt de klassiska satserna av Euklides gäller att en triangel är rätvinklig om och endast om Pythagoras sats gäller. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är alltså ortogonala om och endast om

$$||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2$$

dvs

$$(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Detta villkor kan vi förenkla till

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Uttrycket

$$x_1 y_1 + x_2 y_2$$

kallas **skalärprodukten** av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och betecknas ofta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\ .$$

Två vektorer $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ är alltså ortogonala om och endast om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

EXEMPEL 5 Linjen $x - 2y = 1$ i EXEMPEL 4 är parallell med linjen $x - 2y = 0$ eftersom båda linjerna har samma riktningsvektor. Detta följer av att den första linjen är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

och den andra linjen är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

på parameterform.

Ekvationen $x - 2y = 0$ kan vi tolka som att skalärprodukten mellan vektorerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

är noll, dvs vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

är ortogonal mot varje vektor på linjen. Vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

är alltså **normal** till planet $x - 2y = 0$ samt till planet $x - 2y = 1$.

Generellt gäller att vektorn

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

är normal till linjen

$$Ax + By + C = 0.$$

*ÖVNING 9* Beräkna avståndet från punkten $(2, 3)$ till linjen $x - 2y = 1$.