Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGAR

SVAR OCH ANVISNINGAR

VERSION 1.1

1. Vi använder Gauss elimination första delen och multiplicerar den första ekvationen temporärt med -2 och adderar den till den andra ekvationen. Då får vi systemen

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & -3 \end{cases}$$

a) Den första ekvationen har t ex lösningen $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ som också är lösning till den andra ekvationen (den andra ekvationen har alla reella x_1, x_2, x_3 som lösning).

b) Den första ekvationen har t ex lösningen $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$ som också är lösning till den andra ekvationen.

c) Systemet har inga lösningar alls eftersom den andra ekvationen inte har några lösningar. I den andra ekvationen är vänster led alltid noll och höger led är -3.

Kolonnrummet av systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & b \end{cases}$$

dvs

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

är den linje som går genom origo och vektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Klicka på Figur 1

2. Med Gauss elimination får vi

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Vi väljer $x_2 = s, x_3 = t$ som fria variabler och finner lösningarna

$$x_1 = 1 - s - t, x_2 = s, x_3 = t$$

som på vektorform blir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + +t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta är ett plan, parallellt med planet i EXEMPEL 2, men det går genom punkten $(1, 0, 0)$ på x_1-axeln.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Vi väljer $x_2 = s, x_3 = t$ som fria variabler och finner lösningarna

$$x_1 = 2 - s - t, x_2 = s, x_3 = t$$

som på vektorform blir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + +t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta är ett plan, parallellt med planet i EXEMPEL 2 och ÖVNING 2a), men det går genom punkten $(2, 0, 0)$ på x_1-axeln.

3.

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 = & 1 \end{cases}$$

Vi har redan en trappstegsmatris så första delen av Gauss elimination är redan avklarad. Vi ska hitta pivotelementen. Det är x_1 i första ekvationen och x_2 i andra ekvationen där alltså trappan går ned ett steg. Vi ska göra en nolla i första ekvationen ovanför pivotelementet x_2. Multiplicera därför andra ekvationen temporärt med -1 och addera den till första ekvationen. Då får vi systemet på radkanonisk form.

$$\begin{cases} x_1 & & & - & x_3 = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 = & 1 \end{cases}$$

Vi väljer $x_3 = t$ som fri variabel och den radkanoniska formen ger oss elegant $x_1 = 1 + t$ och $x_2 = 1 - 2t$. På vektorform blir lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningarna bildar en rät linje i rummet $\mathbf{R^3}$ genom punkten $(1, 1, 0)$ och punkten $(2, -1, 1)$. Den första erhålles för $t = 0$ och den andra för $t = 1$.

4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ + x_3 = 1 \end{cases}$$

Vi har redan en trappstegsmatris så första delen av Gauss elimination är redan avklarad. Vi ska hitta pivotelementen. Det är x_1 i första ekvationen och x_3 i andra ekvationen där alltså trappan går ned ett steg. Vi ska göra en nolla i första ekvationen ovanför pivotelementet x_3. Multiplicera därför andra ekvationen temporärt med -1 och addera den till första ekvationen. Då får vi systemet på radkanonisk form.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ + x_3 = 1 \end{cases}$$

Vi väljer $x_2 = t$ som fri variabel och den radkanoniska formen ger oss elegant $x_1 = 1 - t$ och $x_3 = 1$. På vektorform blir lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösningarna bildar en rät linje i rummet $\mathbf{R^3}$ genom punkten $(1, 0, 1)$ och punkten $(0, 1, 1)$.

5. Som riktningsvektor kan vi välja

$$\begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Som punkten (x_0, y_0) kan vi välja välja $(2, 1)$. Ekvationerna på vektorform blir då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Punkten $5, -2)$ ligger på linjen om det finns något värde på parametern t för vilket

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Detta är ett ekvationssystem med en obekant och två ekvationer. Vi finner att $t = 3$ är den enda lösningen. Alltså ligger $(5, -2)$ på linjen.

6. $x - 2y = 1$ är ett ekvationssystem med en ekvation och två obekanta. Den är redan på radkanonisk form där $x-$termen är pivotelement. Vi väljer därför $y = t$ som fri variabel och får lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Vi ska studera ekvationssystemet

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

med de obekanta t och s.

Gauss elimination ger först

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y+x \\ z-x \end{bmatrix}$$

och därefter

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y+x \\ x+2y+z \end{bmatrix}.$$

Villkoret för att ekvationssystemet ska ha lösningar är att $x+2y+z = 0$ i tredje ekvationen. Planet har alltså ekvationen $x + 2y + z = 0$ på parameterfri form.

8. $x - 2y + 3z = 0$ är ett ekvationssystem med en ekvation och tre obekanta.

Den är redan på radkanonisk form där $x-$termen är pivotelement. Vi väljer därför $y = t$ och $z = s$ som fria varaiabler och får lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Normalen har riktningsvektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

och går genom punkten

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalen har därför ekvationen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi söker skärningspunkten mellan normalen och den givna linjen. Denna punkt får vi genom att sätta in normalens koordinater i linjens ekvation. Detta ger $2+t-2(3-2t)=1$ dvs $t=1$. Detta parametervärde ger punkten $(3,1)$ på normalen och denna punkt ligger samtidigt på den givna linjen. Avståndet från punkten $(2,3)$ till linjen är alltså avståndet mellan $(2,3)$ och $(3,1)$. Vi finner att detta avstånd är $\sqrt{(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$.