Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

# POLYNOM

## VERSION 1.1

### POLYNOM ALLMÄNT

Ett polynom $P(x)$ är ett uttryck av formen

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Talet $n$ kallas polynomets *grad*, talen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ är *konstanter* och $x$ är en *variabel*. Konstanterna och variabeln är ofta reella tal, men även komplex variabel och komplexa konstanter förekommer.

Ett polynom är en *funktion* som avbildar reella (eventuellt komplexa tal) in i den reella tallinjen (eller komplexa talplanet).

Ett mycket viktigt problem är att söka *nollställen* till ett polynom, dvs tal $x_0$ sådana att $P(x_0) = 0$. Vi säger också att vi söker *rötter* till *ekvationen*

$$P(x) = 0$$

och menar med det att $x_0$ är en *rot* till ekvationen $P(x) = 0$ om $P(x_0) = 0$.
Om $P(x)$ innehåller en faktor $(x - x_0)^k$ dvs $P(x) = (x - x_0)^k\,Q(x)$ och $Q(x_0) \neq 0$ säges polynomet $P(x)$ ha ett nollställe av *multipliciteten* $k$. Om $k = 1$ säges nollstället vara *enkelt* och om $k = 2$ säges nollstället vara *dubbelt*.

I denna framställning ska vi särskilt koncentrera oss på **polynom av grad två**. Dessa är särskilt viktiga i matematik och naturvetenskap och vi kan göra detaljerade studier av dessa polynom utan att använda formelhanterande program.

## POLYNOM AV GRAD TVÅ MED REELLA KOEFFICIENTER OCH REELL VARIABEL

Vi betraktar i detta avsnitt polynom av formen $P(x) = x^2 + 2Ax + B$. Vi låter koefficienten framför $x^2-$termen vara 1 och variabeln $x$ och koefficienterna $A$ och $B$ är reella tal.

EXEMPEL 1 $P(x) = x^2$ har nollstället $x_0 = 0$ som ett *dubbelt nollställe* eller ett nollställe av *multiplicitet* två. Eftersom $x^2 \geq 0$ för alla $x$ avbildar polynomet den reella tallinjen på den icke-negativa delen av tallinjen.

EXEMPEL 2 $P(x) = (x-1)^2$ har nollstället $x_0 = 1$ som är ett *dubbelt nollställe* eller ett nollställe av *multiplicitet* två. Eftersom $(x-1)^2 \geq 0$ för alla $x$ avbildar polynomet den reella tallinjen på den icke-negativa delen av tallinjen.

*ÖVNING 1* Vilka nollställen har polynomet $P(x) = (x+1)^2$ ? Vilken multiplicitet har nollställena? På vilken del av tallinjen avbildar polynomet de reella talen $x$ ?

*ÖVNING 2* a) Vilka nollställen har polynomet $P(x) = x^2 + 2x + 1$ ?
b) Vilka nollställen har polynomet $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ ?
Vilken multiplicitet har respektive nollställe?

**Ledning:** Kvadratreglerna: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ och $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

*SATS 1* Polynomet $P(x) = x^2 + B$ har

a) inga reella nollställen om $B > 0$.

b) nollstället $x = 0$ av multipliciteten två om $B = 0$.

c) nollställena $\pm\sqrt{-B}$ av vardera multipliciteten ett om $B < 0$.

*Bevis*: a) Eftersom $x^2 \geq 0$ för alla $x$ så blir $x^2 + B \geq B > 0$ för alla $x$. Därmed kan polynomet aldrig bli noll och det finns inga nollställen.

b) $x^2 = 0$ har enda nollstället $x = 0$ av multipliciteten två.

c) $x^2 + B = 0$ innebär att $x^2 = -B > 0$ eftersom $B < 0$. Därför blir $x = \pm\sqrt{-B}$ nollställen. Konjugatregeln $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ger att $(x - \sqrt{-B})(x + \sqrt{-B}) = x^2 - \sqrt{-B}^2 = x^2 - (-B) = x^2 + B$. Detta innebär att

$$x^2 + B = (x - \sqrt{-B})(x - (-\sqrt{-B})).$$

Alltså är $x = \sqrt{-B}$ och $x = -\sqrt{-B}$ enkla nollställen, dvs nollställen av multipliciteten ett.

*ÖVNING 3* Bestäm eventuella nollställen och deras multiplicitet till polynomen

a) $P(x) = x^2 + 4$  b) $P(x) = x^2 - 4$

Med hjälp av SATS 1 kan vi finna alla reella nollställen till det allmänna andragrads-polynomet $P(x) = x^2 + 2Ax + B$. Genom att använda kvadratregeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kan vi skriva

$$P(x) = (x+A)^2 + B - A^2.$$

Om vi här betraktar $x + A$ som variabel har vi ett polynom av samma typ som i SATS 1.

Omskrivningen

$$P(x) = x^2 + 2Ax + B = (x+A)^2 + B - A^2$$

kallas **kvadratkomplettering** och är nyckeln till att vi alltid kan avgöra vilka nollställen ett polynom av andra graden kan ha.

ANMÄRKNING Det går att motivera denna omskrivning genom att man studerar *kurvan* $y = x^2 + 2Ax + B$ som har sitt minimum i $x = -A$ som är derivatans enda nollställe. Genom att byta till ett nytt koordinatsystem $\xi = x + A, \eta = y$, med origo i $(-A, 0)$ beskrivs kurvan av $\eta = \xi^2 + B^2 - A$. Denna observation hör dock mer till området analys och vi behöver inte fördjupa oss i detta här.

Genom att kvadratkomplettera $P(x) = x^2 + 2Ax + B$ och använda SATS 1 kan vi formulera följdsatsen nedan till SATS 1. En följdsats kallas ofta *KOROLLARIUM.*

KOROLLARIUM Polynomet $P(x) = x^2 + 2Ax + B = (x+A)^2 + B - A^2$ har

a) inga reella nollställen om $B - A^2 > 0$.

b) nollstället $x = -A$ av multipliciteten två om $B - A^2 = 0$.

c) nollställena $-A \pm \sqrt{A^2 - B}$ av vardera multipliciteten ett om $B - A^2 < 0$.

Formeln för nollställena i del c) av KOROLLARIET känner vi kanske igen som lösningsformeln för rötterna till en andragradsekvation. I detta avsnitt är det bäst att glömma denna formel och istället kvadratkomplettera varje andragradspolynom. Detta ger bäst förståelse för polynomens egenskaper.

*ÖVNING 4* Finn de eventuella nollställena och deras multiplicitet till polynomen Använd gärna kvadratkomplettering.

a) $P(x) = x^2 + 4x + 5$ b) $P(x) = x^2 + 4x + 4$ c) $P(x) = x^2 + 4x + 3$

## SAMBANDET MELLAN NOLLSTÄLLEN OCH KOEFFICIENTER

Om polynomet $P(x) = x^2 + 2Ax + B$ har nollställena $x_1$ och $x_2$ så blir enligt SATS 1 och KOROLLARIET

$$x^2 + 2Ax + B = (x - x_1)(x - x_2).$$

Om vi räknar ut $(x - x_1)(x - x_2)$ får vi

$$x^2 + 2Ax + B = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Vi har alltså funnit följande samband mellan andragradspolynomets nollställen och dess koefficienter

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & -2A \\ x_1 x_2 & = & B \end{cases}$$

*ÖVNING 5* Man ser omedelbart att polynomet $P(x) = x^2 - 24x + 23$ har nollstället $x = 1$. Vilket är det andra nollstället?

# POLYNOM AV GRAD TRE MED REELLA KOEFFICIENTER OCH REELL VARIABEL

Vi betraktar i detta avsnitt polynom av tredje graden

$$P(x) = x^3 + 3a_2x^2 + 3a_1x + a_0.$$

Vi låter koefficienten framför $x^3-$termen vara 1 och variabeln $x$ och koefficienterna låter vi vara reella tal.

Vi kan omedelbart börja spekulera om det är möjligt att byta koordinatsystem så att vi kan transformera $P(x)$ till formen $x^3 + C$. Andragradspolynomet $x^2 + 2Ax + B$ kunde vi ju transformera till $(x + A)^2 + B - A^2$ med kvadratkomplettering. Inspirerade av kvadratkompletteringen för andragradspolynom använder vi nu *kubregeln*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3.$$

Kubkomplettering av de två första termerna ger

$$P(x) = x^3 + 3a_2x^2 + 3a_1x + a_0 = (x + a_2)^3 + 3a_1x + a_0 - 3a_2^2\,x - a_2^3 =$$

$$= (x + a_2)^3 + 3(a_1 - a_2^2)x + a_0 - a_2^3.$$

Om nu koeeficienten framför $x$-termen $3(a_1 - a_2^2)$ är noll så skulle vi ha ett polynom av formen $x^3 + C$. Om den inte är noll kan vi fortsätta att komplettera från och med $x$-termen och slutligen erhålla

$$P(x) = (x + a_2)^3 + 3(a_1 - a_2^2)(x + a_2) + a_0 - a_2^3 - 3(a_1 - a_2^2)a_2.$$

Vi har därmed reducerat tredjegradspolynomet så att andragradstermen försvinner, dvs till ett polynom av formen

$$x^3 + Ax + B.$$

Är det möjligt att reducera vidare till formen $x^3 + C$? Svaret är nej. $P(x) = x^3 + C$ är en strikt växande funktion som kan anta både positiva och negativa värden (studeras lämpligast i analysen). Därför har $x^3+C$ alltid precis ett nollställe. Eftersom det finns tredjegradspolynom med tre nollställen, t ex $(x - 1)(x + 1)x$, så är det inte möjligt att i allmänhet reducera ett tredjegradspolynom så att det bara innehåller tredjegradstermen och en konstant.

Vid det teoretiska studiet av tredjegradspolynom $P(x)$ kan man alltså nöja sig med att betrakta polynom av formen

$$P(x) = x^3 + Ax + B.$$

Varje tredjegradspolynom antar både positiva och negativa värden och måste därför ha minst ett reellt nollställe. (Ett polynom är en kontinuerlig funktion och sådana antar alla mellanliggande värden, speciellt värdet noll).

Säg att vi har bestämt ett reellt nollställe $x = x_1$ till $P(x) = x^3 + Ax + B$ med någon numerisk metod (numerisk analys). Vi ska visa att då kan vi faktorisera $P(x)$ så att

$$P(x) = x^3 + Ax + B = (x - x_1)(x^2 + c_1 x + c_2).$$

Vi vill bestämma koefficienterna $c_1$ och $c_2$ i faktoriseringen. Vad vi egentligen gör är att vi *dividerar* $P(x)$ med $x - x_1$ och erhåller *kvoten* $x^2 + c_1 x + c_2$. Att bestämma $c_1$ och $c_2$ innebär att man utför en *divisionsalgoritm.*

Vi multiplicerar ihop parenteserna i högerledet ovan och finner

$$P(x) = x^3 + Ax + B = x^3 + (c_1 - x_1)x^2 + (c_2 - c_1 x_1)x - c_2 x_1.$$

Identifiering av koefficienterna ger successivt

$$c_1 - x_1 = 0 \quad \text{dvs} \quad c_1 = x_1.$$

$$c_2 - c_1 x_1 = A \quad \text{dvs} \quad c_2 = A + x_1^2.$$

$$c_2 x_1 = -B.$$

Vi har fått två värden på $c_2$. Dessa måste vara lika.
Multiplicera $c_2 = A + x_1^2$ med $x_1$ så får vi

$$c_2 x_1 = A x_1 + x_1^3$$

som enligt den sista likheten ger

$$A x_1 + x_1^3 = -B,$$

dvs

$$x_1^3 + A x_1 + B = 0.$$

Villkoret på $c_2$ i de två sista likheterna är alltså likvärdigt med att $x_1$ är ett nollställe.

Vi har bevisat ett specialfall av

FAKTORSATSEN Varje polynom $P(x)$ som har nollstället $x = x_1$ kan faktoriseras, dvs vi kan skriva

$$P(x) = (x - x_1)Q(x),$$

där $Q(x)$ är ett polynom av lägre grad än graden av $P$.

Nu följer också hur vi kan finna samtliga nollställen till ett tredjegradspolynom.

SATS 2 Om tredjegradspolynomet $P(x)$ har det reella nollstället $x = x_1$ kan man faktorisera $P(x)$, dvs bestämma koefficienterna $A$ och $B$ så att

$$P(x) = (x - x_1)(x^2 + Ax + B).$$

Samtliga nollställen till $P(x)$ är då $x_1$ samt de eventuella nollställena till faktorn $x^2 + Ax + B$.

EXEMPEL 3 Polynomet $x^3 - x^2 - 5x - 3$ har nollstället $x_1 = -1$. Vi kan då faktorisera:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A + 1)x^2 + (B + A)x + B.$$

Identifiering av koefficienterna (detta är divisionsalgoritmen!) ger då successivt

$$A + 1 = -1, \quad B + A = -5, \quad B = -3.$$

Vi finner

$$A = -2, B = -3.$$

De tre villkoren är konsistenta vilket garanteras av faktorsatsen.

Alltså har vi funnit

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3).$$

Polynomet $x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 3 - 1 = (x - 1)^2 - 4$ har nollställena $x_2 = -1$ och $x_3 = 3$. Tredjegradspolynomet kan alltså faktoriseras som

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2(x - 3).$$

Nollställena $x_1 = x_2 = -1$ som är ett nollställe av multipliciteten två samt det enkla nollstället $x_3 = 3$.

*ÖVNING 6* Polynomet $x^3 + 3x^2 - x - 3$ har nollstället $x_1 = -1$. Bestäm samtliga nollställen.

# POLYNOM AV GRAD TVÅ MED REELLA KOEFFICIENTER OCH KOMPLEX VARIABEL

Polynom $P(z)$ med komplex variabel $z$ är geometriskt något helt annat än ett polynom av en reell variabel. Polynomet $P(z)$ avbildar vektorer $z$ i planet på vektorer $P(z)$ i samma plan. Sådana avbildningar är utomordentligt viktiga i naturvetenskapen men är samtidigt mycket mer komplicerade geometriskt än polynom av en reell variabel. Polynom innehåller produkter, $z^3$ t ex, så det är nödvändigt att kunna multiplicera vektorerna, dvs använda komplexa tal.

När vi använder komplexa tal $z$ för att studera polynom är det mycket ändamålsenligt att skriva talen på formen $z = a + bi$. Talet $a$ är då $x$-koordinaten och $b$ är $y-$koordinaten för vektorn

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Om $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$ kan vi räkna ut $z_1 z_2$ med ”vanliga” räkningar om vi hela tiden sätter $i^2 = -1$. I avsnittet komplexa tal definierade vi

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Vi lärde oss också att tolka denna multiplikation geometriskt. T ex innebär $iz$ att vektorn $z$ vrids $90^\circ$ moturs.

Figur 1

Vi har här också stor användning av **konjugerade** komplexa tal. Om $z = a + bi$ så är dess **konjugat** $\bar{z} = a - bi$. Speciellt gäller

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Om $P(x) = x^2 + 2Ax + B = (x + A)^2 + B - A^2$ inte har reella nollställen, dvs om $B - A^2 > 0$, så kan vi istället ange de komplexa nollställena

$$x = -A \pm i\sqrt{B - A^2}.$$

Vi har här använt resultatet från avsnittet KOMPLEXA TAL att de komplexa tal $z$ för vilka $z^2 = -1$ är $\pm i$. Vi observerar särskilt att de komplexa nollställena är konjugerade. Detta är alltid fallet med komplexa nollställen om polynomet $P(z)$ har **reella koefficienter**.

OBSERVERA! Komplexa nollställen är något helt annat än reella nollställen! Ett komplext nollställe är en vektor i planet som av varje term i polynomet roteras, förlängs (förkortas). Slutligen adderas varje vektor som svarar mot en term i polynomet så att vektorsumman blir nollvektorn.

*ÖVNING 7* Visa att polynomet

$$P(z) = z^2 + 2z + 5$$

har komplexa nollställen och ange dessa på formen $a + bi$.

## POLYNOM AV GRAD TVÅ MED KOMPLEXA KOEFFICIENTER OCH KOMPLEX VARIABEL

Om $P(z) = z^2 + 2Az + B$ har komplexa koefficienter beräknas nollställena med kvadratkomplettering som tidigare.

$$P(z) = (z + A)^2 + B - A^2.$$

Nu handlar det om att bestämma de komplexa tal $w$ för vilka $A^2 - B = w^2$. Denna uppgift löste vi i avsnittet om komplexa tal. Man ansätter $w = x + iy$ och bestämmer de reella talen $x$ och $y$ så att $A^2 - B = x^2 - y^2 + 2ixy$.

*ÖVNING 8* Visa att polynomet

$$P(z) = z^2 + 2iz + 1$$

har komplexa nollställen och ange dessa på formen $a + bi$.

## NÅGOT OM POLYNOM AV GODTYCKLIG GRAD

Vi har sett att polynom med reella koefficienter och reell variabel kan sakna reella nollställen. En viktig fråga är om varje polynom har ett komplext nollställe. Svaret är ja och detta resultat kallas **algebrans fundamentalsats.** Denna sats innebär att varje polynom

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

med komplex variabel och komplexa (eller reella ) koefficenter alltid avbildar planet så att origo finns med i bilden. Med hjälp av algebrans fundamntalsats och faktorsatsen kan man sedan bevisa att varje polynom av grad $n$ har precis $n$ nollställen om vi räknar med komplexa tal.

*ÖVNING 9* Polynomet $z^3 + z^2 + z + 1$ har nollstället $z = -1$. Bestäm samtliga reella och komplexa nollställen. **Ledning**: I stället för att dividera med $z + 1$ kan man försöka faktorisera genom att bryta ut faktorn $z + 1$.